«Flytte og bytte – det har jeg jo bare lært!»

En kvalitativ studie av fire 1P-elever i arbeid med algebraoppgaver, med fokus på begrepsforståelse og ferdigheter

Ingvild Barland Spilling

Masteroppgave ved Utdanningsvitenskapelige fakultet

UNIVERSITETET I OSLO

15.november 2013

«Flytte og bytte – det har jeg jo bare lært»

En kvalitativ studie av fire 1P-elever i arbeid med algebraoppgaver, med fokus på begrepsforståelse og ferdigheter

År: 2013

«Flytte og bytte – det har jeg jo bare lært!»

Ingvild Barland Spilling

http://www.duo.uio.no/

Trykk: Reprosentralen, Universitetet i Oslo

Sammendrag

Hovedtemaet for denne masteroppgaven har vært 1P-elevers arbeid med algebra. Valget av dette temaet har bakgrunn blant annet i doktoravhandlingen: «*Why is algebra so difficult?: a study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency*» (Naalsund, 2012). Naalsund (2012) undersøkte 8. og 10.klassingers arbeid med algebra, og fant at en årsak til norske elevers lave algebrakompetanse kan knyttes til en manglende begrepsforståelse av sentrale elementer i matematikken. Problemstillingen i denne masteroppgaven har vært som følger: *«Hvilken grad av flyt (prosedyreflyt og regneflyt) finner vi hos 1P-elever med middels måloppnåelse, i møte med algebraoppgaver?»*. Valget av problemstilling begrunnes blant annet i at Kilpatrick, Swafford, og Findell (2001) og Tolar, Lederberg, og Fletcher (2009) begge trekker frem flyt som en viktig komponent ved den algebraiske kompetansen.

Tilnærmingen i masteroppgaven har vært kvalitativ. Datainnsamlingsmetoden har vært oppgavebaserte intervju, slik som skildret hos blant andre Goldin (2000). Intervjuene har vært sentrert rundt ett sett av fem oppgaver, der informantene fikk testet graden av prosedyreflyt og begrepsforståelse knyttet til grunnleggende tall- og symbolkunnskap. Noen av oppgavene er hentet fra doktoravhandlingen til Naalsund (2012), for å kunne diskutere noe av datamaterialet opp mot hennes funn. Datamaterialet har bestått av transkripsjoner fra lydopptakene som ble gjort under intervjuene, og informantenes oppgaveløsning på arkene de fikk utdelt. I arbeid med analysen ble det benyttet en kategoribasert tilnærming, der kategoriene var bestemt med utgangspunkt i egnet teori på området.

Hovedresultatet viser at informantene hadde middels til lav grad av flyt i arbeidet med oppgavene. Informantenes grad av flyt kan knyttes opp mot den begrepsforståelsen de hadde av de ulike elementene i oppgavene. Noen av informantene hadde misoppfatninger knyttet til manglende begrepsforståelse. Særlig viste brøk og negative tall seg å være elementer informantene fant utfordrende. Store deler av oppgaveløsningene vitnet om bruk av innlærte prosedyrer og regler som ble benyttet ukritisk. Dette ble tolket som manglende forståelse av hva som lå bak de ulike prosedyrene, og hva som gjorde at de kunne brukes. Når begrepsforståelsen av grunnleggende elementer påvirker elevenes algebraisk kompetanse, er det viktig at disse elementene blir vektlagt i matematikkopplæringen.

Forord

Arbeidet med denne masteroppgaven har vært spennende og lærerikt. Jeg startet med en ide om hva jeg ville undersøke, og endte opp med å lære mer enn jeg hadde forutsett. Det har vært flott å få et innblikk i en forskningsbasert måte å arbeide på.

Det er flere som fortjener en stor takk i forbindelse med denne masteroppgaven. Først og fremst vil jeg takke de fire informantene som sa seg villig til å la seg intervjue. Takk for at dere ville dele tanker og løsningsstrategier med meg! Det er av dere fire jeg har lært aller mest!

Jeg har hatt en flott veileder gjennom hele prosessen. En stor takk rettes til Guri–Anne Nortvedt for tålmodighet, innspill og støtte underveis. Takk for at du tok deg tid.

Jeg vil også takke den nydelige Maria Herset, som har lest korrektur for meg, og som har lyttet til frustrasjoner og problemstillinger knyttet til skrivingen min.

Takk til mine foreldre for støtte og oppmuntring.

Sist, men ikke minst: Takk til mine kjære små, Matteus og Maria. Dere har tålt en mamma som har vært virkelig travel og sliten den siste tiden. Takk for at dere stadig viser meg hva det er som er viktig i livet. Og min kjære ektemann: Du er en hverdagshelt! Jeg elsker deg!

--

Ingvild B.Spilling

Innholdsfortegnelse

Figurlisteoppføring

1 Innledning

1.1 Algebra – en nøkkelkompetanse

De siste årene har tester, som TIMSS og PISA, vist at norske elever skårer middels i matematikk på den internasjonale skalaen (se blant annet Grønmo et al., 2012). I TIMSS-rapporten fra 2011 konkluderes det med at *«prestasjonene fortsatt er svake sett i et internasjonalt perspektiv.»* (Grønmo et al., 2012, s. 20). Med andre ord; norske elever skårer lavere i matematikk enn det som er ønskelig. Dette understrekes særlig ved at norske elever presterer svært svakt i algebra (Grønmo, 2013).

I skolematematikken brukes «algebra» som en betegnelse på regning med ligninger og uttrykk, der det er en eller flere ukjente. Dette er en snever betegnelse. Algebra handler om strukturer, sammenhenger og størrelse (Kieran, 1989). Dette gjør algebra til et nyttig verktøy for å utforske og analysere ulike matematiske begreper og ideer. Algebra faller inn under de mer avanserte delene av matematikken. Den konkrete aritmetikken, som blant annet består av læren om tall og tallegenskaper, legger et viktig grunnlag for arbeid med algebra (Kilpatrick et al., 2001). Når elever går fra å arbeide med konkret aritmetikk til algebra, utvikler de abstrakte resonneringsevner. Disse evnene er nødvendige for å kunne arbeide videre med matematikk og andre vitenskapelige emner (Ketterlin-Geller & Chard, 2011). Et annet aspekt ved algebraen er at den gir mulighet til å beskrive fenomener vi finner i dagliglivet med matematiske uttrykk og symboler. Disse symbolene kan vi utføre beregninger med (Naalsund, 2012).

På denne måten bidrar kunnskap i algebra til at man kan se sammenhenger og årsaker i verden rundt oss. Algebraiske resonnementer brukes i dagliglivet for å løse mer eller mindre kompliserte problemer. Naalsund beskriver dette som at algebra kan hjelpe elever med å "*make connections in varied mathematical representations, mathematics topics, and disciplines that rely on mathematical relationship, such as physics, engineering, computer science, finance, social sciences, pharmacy, medicine, and many more*."(Naalsund, 2012, s. 13 -14). Algebra er dermed ikke bare et viktig verktøy i matematikken, men også i en god del andre deler av samfunnet. Når en elev har manglende algebraisk kompetanse, kan det dermed by på utfordringer – også utenfor matematikkfaget.

Det er flere årsaker til at algebra er vanskelig for mange elever. En forklaring finner vi hos Naalsund (2012). Hun har undersøkt ungdomsskoleelevers kompetanse i algebra, og skriver at mye av vanskene kan skyldes en gjennomgripende mangel på matematisk begrepsforståelse hos eleven (Naalsund, 2012). I matematikken benytter vi mange begreper, som ikke alltid er intuitive. Dersom ikke eleven forstår hva som ligger i de ulike begrepene, kan dette gi utfordringer i arbeidet med matematikken. Dette kan på sikt føre til at eleven ikke oppnår ønsket kompetanse.

Observasjoner fra praksis ved en videregående skole i Oslo bidro til å vekke interessen for en annen side ved dette temaet. I møtet med flere elever i arbeid med ligningsoppgaver ble det tydelig at flere brukte mye tid på ting som burde vært automatisert. For eksempel var det flere som ikke hadde automatisert multiplikasjonstabellen. Dette førte til at mye tid ble brukt på å finne svaret, der de kunne ha tatt beregningene raskt i hodet. Sjøvoll (2006) trekker frem manglende tallkunnskap – og forståelse, og en manglende automatisering av disse, som årsak til vansker i matematikk. (Sjøvoll, 2006). Å se nærmere på noen elevers tallkunnskap er derfor relevant.

1.2 Forskningsspørsmål

Formålet med studien er å få et innblikk i noen elevers arbeid med enkle algebraoppgaver. Fokuset lå på sentrale matematiske elementer i oppgavene, som bidro til utfordringer. Dette var bakgrunn for valg av forskningsspørsmål:

«Hvilken grad av flyt (prosedyreflyt og regneflyt) finner vi hos 1P-elever med middels måloppnåelse, i møte med algebraoppgaver?»

Jeg vil se nærmere på hvordan elevene går frem for å løse enkle algebraoppgaver, hvilke hindringer de eventuelt møter. Det er interessant å undersøke hvilken grad av flyt som er med på å prege løsningsprosessen. Flyt, eller matematisk flyt, beskrives som evnen til å utføre matematiske operasjoner effektivt, automatisk og uten store anstrengelser (Jolivette, Lingo, Houchins, Barton-Arwood, & Shippen, 2006). Flyt består av komponentene effektivitet, nøyaktighet og fleksibilitet, som alle tre er viktige i arbeid med matematikk (Russell, 2000). Med utgangspunkt i dette er det relevant å se nærmere på graden av flyt hos elever i arbeid med matematikk.

I masteroppgaven vil jeg se på flyt som tilstedeværelse av prosedyreflyt og derunder regneflyt. Disse begrepene vil jeg redegjøre for i teoriavsnittet.

En 1P- elev med middels måloppnåelse vil være en elev på VG1 ved en studiespesialiserende videregående, som tar matematikk fellesfag. Eleven har karakter 3, eller en svak 4, i faget.

1.3 Tilnærming og metode

Med utgangspunkt i forskningsspørsmålet finner jeg det mest hensiktsmessig med en kvalitativ tilnærming. Dette begrunnes blant annet i at det ikke er svaret elevene kommer frem til, men selve prosessen rundt oppgaveløsningen, som er i fokus. Det er elementer som foregår inne i hodet til eleven som skal undersøkes. En tilnærming som gir mulighet til å gå mer i dybden i noen få elevers arbeidsprosesser er derfor nødvendig.

Som datainnsamlingsmetode velger jeg å benytte oppgavebaserte intervju. Goldin (2000) beskriver et oppgavebasert intervju som et intervju der informanten og intervjueren er i interaksjon med en eller flere oppgaver. Intervjuet er lagt opp slik at informanten ikke bare forholder seg til intervjuers spørsmål, men også oppgaven og settingen oppgaven er gitt i (Goldin, 2000).

Denne datainnsamlingsmetoden passer godt til å undersøke forskningsspørsmålet, da oppgavebaserte intervju gjør det mulig å fokusere mer på informantens oppgaveløsning, snarere enn bare på mønstre av riktig og gale svar (Goldin, 2000).

1.4 Oppbygging av oppgaven

Masteroppgavens første del består av en redegjørelse for de teoretiske begrepene som danner grunnlaget for analysen av datamaterialet. Det redegjøres for hva algebraisk kompetanse innebærer, og hvorfor det er av interesse å se nærmere på dette. Videre tar oppgaven for seg begrepene prosedyreflyt og begrepsforståelse. Det redegjøres for sammenhengen mellom dem, i lys av egnet teori på området. I tillegg knyttes disse begrepene opp mot automatiserte ferdigheter. Avslutningsvis i teoridelen redegjøres det for flere punkter som kan bidra til utfordringer i arbeid med algebra.

Det tredje kapittelet i masteroppgaven er viet til en beskrivelse av metodetilnærmingen. Det redegjøres for valget av metode, og hvilke argumenter som er lagt til grunn. Deretter presenteres det hvordan datainnsamlingen har foregått, og valgene som er tatt underveis. Valgene begrunnes i aktuell metodeteori. Studiens validitet/gyldighet og eventuelle begrensninger drøftes også. I teoridelen, og metodedelen, benytter jeg pronomenet «han» der det drøftes teori knyttet til en elev generelt.

Analyse- og resultatkapittelet består av en presentasjon og analyse av datamaterialet. Materialet blir drøftet opp mot det teoretiske rammeverket som er gitt i teorikapittelet. Kapittelet er lagt opp kronologisk rundt de ulike oppgavene i settet, i den rekkefølgen de ble gitt informantene.

Det siste kapittelet i masteroppgaven består av en oppsummering av funnene, samt drøfting av dem. Det legges vekt på å trekke frem de mest sentrale tendensene i datamaterialet. Deretter følger et svar på forskningsspørsmålet. Den siste delen av dette kapittelet består av noen tanker om hvilke implikasjoner funnene kan ha.

2 Teoretisk bakgrunn

Teorikapittelet bygges opp rundt begrepene begrepsforståelse og prosedyreflyt. Dette er begreper som legger grunnlaget for masteroppgaven. Som nevnt i innledningen er algebra et område som byr på utfordringer for norske elever. I dette kapittelet trekkes det frem noen elementer som kan bidra til å belyse hvorfor dette er tilfelle.

2.1 Algebraisk kompetanse som en del av matematisk kompetanse

I følge Kilpatrick et al. (2001) består matematisk kompetanse av fem komponenter. Disse fem beskrives som sammenflettede tråder (Kilpatrick et al., 2001, s. 116). For å oppnå god matematisk kompetanse er det viktig at alle fem komponentene er med.

Den første av de fem komponentene er «conceptual understanding». Vi har ikke noen god norsk oversettelse for dette. «Begrep» dekker ikke alt det «concept» inneholder. Blant annet innebærer «concept» en abstrakt idé i tillegg til et mer konkret begrep. I oppgaven vil jeg oversette «conceptual understanding» med «begrepsforståelse», og benytter dermed ordet «begrep» noe bredere enn vanlig. Begrepsforståelsen dreier seg om forståelse av begreper og prinsipper i matematikken. Når elever arbeider med algebra kan man blant annet se at begrepsforståelsen av grunnleggende tallegenskaper spiller en viktig rolle. Blant annet er gode tallkunnskaper viktig når eleven tar i bruk algoritmer for å løse algebraiske oppgaver (Ketterlin-Geller & Chard, 2011).

Den andre komponenten er procedural fluency. Dette har jeg oversatt til prosedyreflyt. Prosedyrekunnskap defineres som evnen til å uføre operasjoner for å løse problemer. God prosedyreflyt handler da blant annet om å kunne automatisere prosedyrene, og effektivt kunne benytte seg av prosedyrekunnskapen. I tillegg til begrepsforståelse er god prosedyrekunnskap nødvendig i arbeid med algebra. Det er både viktig med god kunnskap om de ulike prosedyrene, men også evnen til å benytte riktig prosedyre effektivt og fleksibelt. Dermed er prosedyreflyt en sentral komponent i algebraisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001).

Den tredje komponenten hos Kilpatrick et. al er strategisk kompetanse. Strategisk kompetanse omfatter evnen til å formulere matematiske problemer og løse dem ved å benytte gode og hensiktsmessige strategier (Kilpatrick et al., 2001). Forfatterne argumenterer for at det er tette bånd mellom den strategiske kompetansen og både begrepsforståelse og prosedyreflyt. Dette begrunner de blant annet i at strategisk kompetanse spiller en stor rolle i utviklingen av prosedyreflyt (Kilpatrick et al., 2001).

Den fjerde komponenten er «adaptive reasoning». Dette innebærer elevens evne til logisk tenkning. I arbeid med matematikk fungerer «adaptive reasoning» som limet som holder de ulike delene sammen. Elever med godt utviklet adaptive reasoning, er i stand til å navigere gjennom de mange tallfakta, prosedyrer, begreper og løsningsmetoder, som de møter (Kilpatrick et al., 2001). De er også i stand til å sette det sammen, slik at det gir mening. På den måtes kan adaptive reasoning være et viktig verktøy for å kunne vurdere hvorvidt en prosedyre er hensiktsmessig eller ikke.

Den siste av de fem komponentene er «productive disposition», som kan omtales som evnen til å se matematikk som et viktig verktøy. Samtidig ligger også troen på sin egen effektivitet inn i dette (Kilpatrick et al., 2001). Jo mer elevens begrepsforståelse øker, jo lettere er det for eleven å se viktigheten av matematikken.

En beskrivelse av algebraisk kompetanse finner vi hos Tolar et al. (2009). De knytter tre kognitive komponenter opp mot algebraisk kompetanse. Disse er arbeidsminne, spatiell visualisering (3D) og regneflyt (Tolar et al., 2009). I arbeid med algebra kreves det at man kan forholde seg til flere matematiske begreper på en gang. Å kunne holde orden på og veksle mellom de ulike begrepene krever en god arbeidsminnekapasitet. Det kreves også at man kan veksle riktig mellom de ulike begrepene, for å kunne løse oppgaven på best måte. En god begrepsforståelse er dermed en viktig forutsetning.

En annen viktig evne knyttet til algebraisk kompetanse er å kunne visualisere. For eksempel kunne visualisere et funksjonsuttrykk. Dette kan bidra til at det blir lettere å forstå hva en jobber med, og dermed kunne tilegne seg bedre kompetanse. Spatiell visualisering, 3D, er nært knyttet opp mot arbeidsminnet (Tolar et al., 2009). Sammen med regneflyt bidrar de til at eleven har bedre forutsetning for å tilegne seg ønsket kompetanse. Regneflyt er den tredje og siste komponenten Tolar et al. (2009) nevner. Dette omtales som rask og riktig aritmetisk beregning (Tolar et al., 2009). I forhold til algebra er dette viktig. Hovedargumentet til dette ligger i at automatiserte numeriske operasjoner påvirker automatisering av prosedyrer i arbeid med algebra (Tolar et al., 2009). En elevs evne til å utføre prosedyrer i algebraisk oppgaveløsning vil avhenge av hvor automatiserte de grunnleggende tallferdighetene er. En elev med god flyt vil løse problemer raskere og mer hensiktsmessig. I motsetning vil en elev med lav grad av flyt ikke være like effektiv. Han vil også være mindre fleksibel i oppgaveløsningen (Russell, 2000).

Videre i masteroppgaven vil jeg fokusere på de to komponentene begrepsforståelse og prosedyreflyt. De er begge sentrale komponenter i den matematiske kompetansen. Tolar et al. (2009) og Kilpatrick et al. (2001) har til felles at de argumenterer for at flyt er en viktig komponent i arbeid med matematikken, og særlig algebra. Dette er utgangspunktet for å undersøke graden av prosedyreflyt hos elever i arbeid med algebra.

2.2 Begrepsforståelse og prosedyreflyt

Innenfor både utviklingspsykologisk, læringsteoretisk og matematikkdidaktisk forskning finner vi ønsket om å skille mellom ulike kunnskapstyper. I utviklingspsykologien ser en ikke på kunnskap som et enhetlig konstrukt, men snarere som minst to forskjellige typer kunnskap (Schneider & Stern, 2010). Begrepskunnskap på den ene siden, settes opp mot prosedyrekunnskap, på den andre siden. Skillet mellom disse to kunnskapstypene har ikke alltid vært helt det samme, men essensen har gått igjen.

Innenfor matematikkdidaktikk argumenterer blant annet Hiebert og Lefevre (1986) for at skillet mellom begrepsforståelse og prosedyrekunnskap ligger i skillet mellom forståelse og ferdighet (Hiebert & Lefevre, 1986). De karakteriserer begrepskunnskap som kunnskap som er rik på sammenheng. Begrepskunnskap er dermed et nett av kunnskap der sammenhenger er vel så fremtredende som de små informasjonsbitene (Hiebert & Lefevre, 1986). Videre deler de prosedyrekunnskap inn i to områder. Det ene dreier seg om kjennskap til de enkelte symboler og systemer, og hva de betyr. Det andre området dreier seg om regler eller prosedyrer man benytter for å løse matematiske problemer (Hiebert & Lefevre, 1986).

Hvorfor det er nødvendig å skille mellom disse to kunnskapstypene? Et svar på dette finner vi hos Byrnes og Wasik (1991). De presenterer tre hovedargumenter for skillet mellom begrepsforståelse og prosedyrekunnskap. Det første argumentet bygger på at prosedyrekunnskap og begrepsforståelse ikke kan reduseres til en og samme type kunnskap. Til det er de for forskjellige. Det andre argumentet legger vekt på at de to kunnskapstypene har ulike funksjoner, der begreper bidrar til å skape orden og organisering i kunnskaper. Prosedyrer, på sin side, gir en oppskrift på hvordan vi kan nå et ønsket mål (Byrnes & Wasik, 1991). Den tredje, og siste, gruppen av argumenter baserer seg på funn; man har sett at noen elever kan ha høy grad av begrepsforståelse, men ingen prosedyrekunnskap, og motsatt (Byrnes & Wasik, 1991). Alle disse tre kategoriene av argumenter taler klart for å fastholde et skille mellom disse to kunnskapstypene. Det er likevel spennende å undersøke forholdet mellom dem, og hvordan de er med på å påvirke hverandre. Dette vil redegjøres for senere, men først vil jeg redegjøre for hva som kjennetegner både begrepsforståelse, og prosedyreflyt.

2.2.1 Begrepsforståelse

Hiebert og Lefevres definisjon av begrepsforståelse finner vi igjen blant annet hos Rittle-Johnson, Siegler, og Alibali (2001). Her defineres begrepsforståelse som implisitt og eksplisitt forståelse av begreper og prinsipper i et område. Det innebærer også kunnskap om og forståelse av sammenhenger mellom begrepene i det området. Denne kunnskapen er fleksibel og generaliserbar (Rittle-Johnson et al., 2001). Tilsvarende skriver Engelbrecht, Harding, og Potgieter (2005) at begrepsforståelse dekker den delen av kunnskaper som går på forståelse av sammenhenger, systemer og begreper i matematikken. Her finner vi *forståelse* av matematiske ideer og prosedyrer, så vel som kunnskap om grunnleggende tallfakta og tallegenskaper (Engelbrecht et al., 2005). Naalsund (2012) fant i sin studie at norske elever har lav begrepsforståelse av sentrale matematiske elementer. Dette mener hun kan forklare hvorfor norske elevers algebrakunnskaper er så lave (Naalsund, 2012).

2.2.2 Prosedyreflyt

Hiebert og Lefevres definisjon av prosedyrekunnskap gjenspeiles i Rittle-Johnson et al. (2001) sin definisjon av prosedyrekunnskap. De definerer det som evnen til å utføre operasjoner for å løse oppgaver (Rittle-Johnson et al., 2001). Prosedyrekunnskap handler om ferdigheter. Prosedyreflyt dreier seg om graden av flyt eleven har når han benytter prosedyrekunnskapen. I det ligger det ferdigheter i å utføre prosedyrer på en fleksibel, nøyaktig, effektiv og hensiktsmessig måte (Engelbrecht et al., 2005). Eleven oppnår god flyt i arbeidet med matematikken ved å effektivt benytte egnet prosedyre.

Ketterlin-Geller og Chard (2011) observerte at bruk av algoritmer bidro til økt prosedyreflyt. Dette forklarer de med at algoritmene bidro til å gi et generalisert rammeverk for elevens bruk av regneoperasjoner (Ketterlin-Geller & Chard, 2011). Det er utfra dette tydelig at prosedyreflyt er forbundet med elevens innlærte kunnskaper og ferdigheter.

Fleksibilitet i forhold til prosedyrer innebærer at eleven har evnen til å løse et problem på flere måter, og evner å velge den mest hensiktsmessige strategien for å løse et problem (Schneider, Rittle-Johnson, & Star, 2011). I arbeid med ligninger er dette særlig viktig. Dersom eleven har utviklet en god fleksibilitet i forhold til prosedyrene, vil han ha flere mulige problemløsningsstrategier tilgjengelige. Han har også evnen til å utvikle nye prosedyrer i møte med ukjente oppgavetyper (Star & Seifert, 2006). Dette bidrar til at fleksibilitet er en viktig komponent i utviklingen av prosedyreflyt. Det motsatte av fleksibilitet i forhold til prosedyrer, og strategier er det som Ostad (1999) omtaler som strategirigiditet.

Regneflyt

Prosedyrekunnskap inkluderer både evnen til rask og riktig aritmetisk beregning og forståelse av de underliggende matematiske ideene og prinsippene (Ketterlin-Geller & Chard, 2011). Evnen til rask og riktig aritmetisk beregning omtales som regneflyt. Regneflyt er viktig i arbeid med matematikk fordi den frigjør plass i arbeidsminnet. På denne måten hjelper denne evnen elevene i problemløsningen. En god regneflyt kjennetegnes ved evnen til å svare korrekt på matematiske problemer på et gitt vanskelighetsnivå, innen en viss tid (Calhoon, Emerson, Flores, & Houchins, 2007). Det dreier seg med andre ord om gode regneferdigheter. Inn under regneferdigheter ligger blant annet tabellkunnskap. Mange typer matematikkoppgaver krever at eleven er i stand til å konsentrere seg om ulike regneprosedyrer samtidig som de foretar hoderegning (Holm, 2002). Hoderegning krever, slik Holm (2002) presiserer, at eleven har etablert god tabellkunnskap.

Å mestre hoderegning er en viktig forutsetning for god regneflyt. En elev som ikke mestrer hoderegning, vil bruke mer ressurser på oppgaveløsningen (Holm, 2002). Arbeidet med oppgaven vil bli avbrutt av utregninger som må utføres underveis som separate operasjoner. I tillegg vil en elev som ikke mestrer hoderegning benytte mindre hensiktsmessige strategier for utregning, slik som fingertelling. Elever som ikke har godt utviklet hoderegning, men heller benytter seg av fingertellingsstrategier har større fare for å utvikle strategirigiditet (Ostad, 1999). Det er dermed klart at hoderegning, og derunder godt utviklet og automatisert tabellkunnskap er en forutsetning for god regneflyt.

En dårlig utviklet regneflyt kan påvirke matematisk forståelse på samme måten som dårlige dekodingsferdigheter påvirker leseforståelsen (se blant annet Calhoon et al., 2007). Dette skyldes at regneflyt er en kompleks prosess, der de grunnleggende byggesteinene i matematikken spiller en stor rolle. Uten regneflyt er det vanskelig for en elev å tilegne seg matematisk kunnskap på et høyere nivå, slik som i algebra (Calhoon et al., 2007). Codding et al. (2007) forklarer dette med at regneflyt kan danne grunnlag for abstrakt tenkning og problemløsning. Dette er nødvendig i arbeid med algebra.

Forholdet mellom regneflyt og prosedyreflyt

Graden av prosedyreflyt forteller om hvordan eleven benytter seg av prosedyrekunnskapen. Regneflyt dreier seg blant annet om gode regneferdigheter, og spiller en viktig rolle i elevers tallforståelse (se blant annet Varol & Farran, 2007). I tillegg spiller regneflyt en stor rolle for elevens evne til å kunne vurdere hvorvidt en prosedyre er hensiktsmessig eller ikke (Varol & Farran, 2007). Regneflyt henger dermed nøye sammen med prosedyreflyt.

2.2.3 Sammenhengen mellom begrepsforståelse og prosedyreflyt

Begrepsforståelse og prosedyreflyt er, slik vi ser hos Kilpatrick et al. (2001), to viktige komponenter ved den matematiske kompetansen. Byrnes og Wasik (1991) observerte at *«conceptual and procedural knowledge affect each other diachronically, not synchronically.»* (Byrnes & Wasik, 1991, s. 778). Med dette understreker artikkelforfatterne at det ikke nødvendigvis er slik at disse to kunnskapstypene utvikler seg parallelt. Hvem av dem som utvikles først er det presentert flere teorier for. I tillegg er det også presentert teorier for hvorvidt det er begrepsforståelsen eller prosedyrekunnskapen som har størst betydning for matematikkompetansen.

Schneider et al. (2011) kategoriserer de ulike teori-tilnærmingene i fire grupper; begrep-først teorier, prosedyre-først teorier, teorier om at de er gjensidig uavhengige, og iterative modeller. Den sistnevnte gruppen av teorier argumenterer for at begrepsforståelse og prosedyrekunnskap utvikles i samhandling med hverandre (se blant annet Rittle-Johnson et al., 2001).

Hiebert og Lefevre (1986) skriver at prosedyrer kan bidra til å legge til rette for begrepsforståelse. Dette begrunner de med at prosedyrer som er blitt rutinerte kan redusere elevens anstrengelse i problemløsningen (Hiebert & Lefevre, 1986). På den måten bidrar prosedyreflyt til løsning av komplekse oppgaver. Samtidig presiserer de at begrepsforståelsen har en viktig funksjon i overvåkingen av prosedyreutfallet (Hiebert & Lefevre, 1986). En elev med god begrepsforståelse er i bedre stand til å sjekke hvorvidt svaret gir mening. Foster (2007) presenterer også argumenter for hvorfor begrepsforståelsen er viktig. Han argumenterer med at å drille inn regler ikke automatisk bidrar til at eleven skjønner matematikken bak. Han støtter seg på blant annet Star og Seifert (2006), som presiserer at pugging ikke nødvendigvis fører til noen dypere forståelse. Uten god forståelse av det som blir gjort er det vanskelig for eleven å oppnå ønsket kompetanse.

Engelbrecht et al. (2005) argumenterer for at begrepsforståelse danner grunnlaget for tilegnelsen av prosedyrekunnskap. Denne prosedyrekunnskapen baner deretter vei til ny begrepsforståelse. Dette taler for at begge kunnskapstypene er essensielle for å utvikle god matematikkompetanse. Engelbrecht et al. (2005) påpeker videre at god prosedyreflyt er en viktig forutsetning for metakognisjon. Metakognisjon omfatter evnen til å regulere egen tenkning. I tillegg omfatter det også kunnskap om fremgangsmåter og prosedyrer som egner seg i ulike sammenhenger (Elstad, Turmo, & Andreassen, 2006). God metakognisjon kan dermed bidra til økt prosedyreflyt. Det er likevel viktig å legge merke til, slik Özsoy (2011) poengterer, at en elev kan feilaktig føle seg trygg på at løsningen er riktig når den blir produsert lett og flytende. At løsningen presenterer seg lett, betyr ikke nødvendigvis at den er riktig. Med andre ord: Opplevelsen av flyt i arbeidet er ikke alltid det samme som reel grad av flyt. For å kunne vurdere om prosedyren er riktig, kreves det at eleven har god begrepsforståelse i tillegg til god prosedyreflyt.

Uten begrepsforståelse er det vanskelig å oppnå ønsket kompetanse. Likevel er det slik at uten flyt i utføringen av matematikk, vil det være vanskelig å opparbeide noen solid forståelse. Det er dette vi leser hos Kilpatrick et al. (2001), og som danner grunnlaget for masteroppgaven: "*Without sufficient procedural fluency, students have trouble deepening their understanding of mathematical ideas or solving mathematical problems*." (Kilpatrick et al., 2001, s. 143). Dette kan observeres i elevers arbeid med matematikk, og særlig algebra. Man ser at: "*the* *attention they devote to working out results they should recall or compute easily prevents them from seeing important relationships*.” (Kilpatrick et al., 2001, s. 143). En elev som har dårlig prosedyreflyt vil bruke unødig tid på operasjoner og beregninger som burde gått mer automatisk. Når arbeidsminnet er opptatt av å arbeide med disse, vil eleven overse viktige elementer ved problemløsningen. Det vil også være mer krevende for elevene å løse den gitte oppgaven, for det må legges mer energi inn i hvert trinn av oppgaveløsningen.

2.3 Automatisering av ferdigheter

Når eleven er i stand til å utføre en operasjon uten å tenke over det, sier vi at den er blitt automatisert. Automatisering av ferdigheter er grunnleggende i matematikk. Hos Hiebert og Lefevre (1986) finner vi argumenter for at automatiske og effektive strategier bidrar til å skape mer rom for begrepsforståelse. Kilpatrick et al. (2001) legger frem at når en prosedyre blir mer automatisert, frigjøres det mer kapasitet hos eleven. På denne måten kan eleven benytte resursene på andre aspekter ved problemløsningen. Det bidrar også til at eleven utrustes bedre til å ta fatt på nye problemtyper. Dette fører etter hvert til ny forståelse (Kilpatrick et al., 2001).

Relasjonen mellom prosedyreflyt og automatisering

Tolar et al. (2009) omtaler regneflyt som en indikator på automatisering av numeriske operasjoner. Det vil si at god regneflyt tyder på god automatisering av tallferdigheter, tabellkunnskap og operasjoner. En slik automatisering er viktig. Elever med manglende automatisering av grunnleggende ferdigheter er i mindre grad i stand til å forstå underliggende matematiske begreper. De kan også ha vansker med å tilegne seg pensum som legger vekt på en problemløsningstilnærming (Codding et al., 2007). Dette skyldes blant annet at en slik tilnærming krever at eleven kan konsentrere seg om regneprosedyrer samtidig som han utfører utregningene i oppgaven (Holm, 2002). I tillegg til automatisering av ferdigheter er godt utviklet tabellkunnskap en viktig forutsetning for å lykkes i arbeidet med matematikk.

Videre ser vi at *«automaticity with numerical operations influences automaticity with procedural problem-solving in algebra, because one is a component of the other”*(Tolar et al., 2009, s. 242). Med andre ord er automatisering av tallkunnskap viktig for utviklingen av prosedyrekunnskap, og deretter prosedyreflyt. Dette er særlig viktig i algebra. Det er presisert at «*students need to be able to fluently execute the operations until they become second nature, and thus effortlessly available to effectively apply these skills in learning and studying algebra*» (Ketterlin-Geller & Chard, 2011, s. 75). I arbeidet med algebra blir dermed automatiseringen av ferdigheter avgjørende.

Det er i denne sammenhengen viktig å påpeke at automatiserte ferdigheter ikke er like fleksible. Det at automatisert kunnskap foregår med minimal bruk av kognitive ressurser er styrken til denne kunnskapstypen, og en hovedgrunn for hvorfor det er så viktig å tilegne seg den. Som Schneider og Stern (2010) mener, på grunn av denne lave kognitive overvåkingen, er det ikke lett å omdanne denne kunnskapen til noe annet. En konsekvens av dette er dermed at automatiserte ferdigheter ofte er knyttet til spesifikke problemtyper. Automatisering av ferdigheter er avgjørende i arbeid med algebra. Men de er ikke nok i seg selv. En elev kan ha automatisert ferdigheter for å løse en enkel førstegradsligning med positive heltall. Når en brøk dukker opp i en ligning, vil det være nødvendig med en forståelse av hva brøken innebærer, for å kunne løse ligningen. Uten en forståelse av dette, og uten kunnskap om flere prosedyrer, vil ikke den allerede automatiserte ligningsløsningsprosedyren være nyttig. Dermed må også prosedyrekunnskap og begrepsforståelse knyttes opp til denne kunnskapen, og dermed bidra til økt prosedyreflyt.

2.4 Utfordringer i algebra

Å gjøre det bra i aritmetikk avhenger av det lageret eleven har av aritmetiske fakta, ulike problemløsningsstrategier og en forståelse av aritmetiske begreper og prinsipper (Robinson & Dubé, 2009). Algebra bygger på den kunnskapen elevene har utviklet i aritmetikk. Likevel er det å tenke algebraisk forskjellig fra aritmetisk tankegang. Overgangen til algebraisk tankegang kan bli lettere dersom eleven klarer å utvikle en forståelse av at algoritmiske prosesser kan være generelle, snarere enn kun enestående utregninger (Stephens, 2006). På den måten åpnes det opp for å kunne se mønstre, sammenhenger og likheter.

I overgangen fra aritmetikk til algebra støter elever på flere utfordringer. Aritmetisk kunnskap legger et viktig grunnlag for videre algebraisk kunnskap. Manglende tallkunnskaper kan derfor bidra til vanskeligheter med algebra. I tillegg til tallkunnskap spiller elevens symbolkunnskap en stor rolle. I møtet med algebra introduseres eleven for flere symboler og tegn. Noen av disse er kjent fra tidligere arbeid med matematikk. Noen er kjent for eleven, men er tilegnet en annerledes betydning i algebra. Det er også symboler og tegn som er helt ukjente for eleven når algebra introduseres. Videre presenteres noen av de mest sentrale tallfakta, tegn og symboler som kan bidra til utfordringer i elevers arbeid med algebra. De omtales samlet som utfordringselementer.

2.4.1 Tallkunnskap

Dersom elever har manglende tallforståelse, og ikke har lagret tilstrekkelig med tallfakta, kan dette bidra til utfordringer i arbeid med algebra. Dette skyldes at det i arbeid med algebraoppgaver kreves at eleven tar i bruk flere begreper samtidig, kombinert med grunnleggende tallfakta. En bestemt sekvens av steg eleven benytter for å løse et problem, kalles en algoritme. Det er observert at bruk av algoritmer kan bidra til økt prosedyreflyt (Ketterlin-Geller & Chard, 2011). I følge Ketterlin-Geller og Chard (2011) er elevers begrepsforståelse knyttet til grunnleggende tallkunnskaper en viktig komponent i arbeid med algoritmer. Graden av prosedyreflyt i arbeidet med algebra kan dermed knyttes opp mot elevens tallkunnskap.

Positive og negative heltall

Vlassis (2004) omtaler studier som viser at når negative tall introduseres i arbeid med førstegradsligninger, øker antall feil hos elevene. Hun forklarer dette med at en del av kunnskapen elevene har om positive heltall ikke lar seg overføre til de negative tallene. Et positivt heltall kan «telles». Et negativt tall lar seg ikke «kvantifisere» på samme måte. Som Gullick, Wolford, og Temple (2012) sier: man kan ikke ha minus 2 bøker. Elevene assosierer ikke negative tall automatisk med en størrelse. Dette skiller de negative tallene fra de positive tallene.

Kilhamn (2011) argumenterer for at mange av problemene elever møter i arbeid med å løse ligninger ikke nødvendigvis ligger i ligningenes struktur. Mange av vanskene skyldtes at de må håndtere negative tall (Kilhamn, 2011). En manglende begrepsforståelse rundt negative tall kan hindre prosedyreflyt i arbeid med likninger.

Minustegnet spiller en viktig rolle i utviklingen av begrepsforståelse knyttet til negative tall (Vlassis, 2004). Dette skaper utfordringer, da minustegnet brukes både som et operasjonssymbol og som en indikasjon på at vi har med et negativt tall å gjøre. Elever med lav begrepsforståelse knyttet til minustegnet gjør ofte prosedyrefeil i arbeid med ligninger (Kilhamn, 2011).

Brøk

Jordan et al. (2013) mener at kunnskap om brøk er essensielt i tilegnelsen av algebraisk kompetanse. Dette begrunner de i at kunnskap om brøk bidrar til økt forståelse av endringstakt, noe som er en integrert del av algebra (Jordan et al., 2013). Det er godt dokumentert at brøk er blant de mest komplekse matematiske begrepene elever møter i skolematematikken (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). En av årsakene til at elever møter utfordringer i arbeidet med brøk kan forklares ved at det er ulike måter å forstå brøk på (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Brøk kan forstås som en sammenheng mellom to størrelser, eller som en funksjon knyttet til et tall, et objekt eller en mengde. Det kan også forstås som et resultat av divisjon av heltall, eller som en størrelse eller mål på et intervall (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

En annen årsak til elevers vansker med brøk ligger i at arbeid med rasjonale tall er mindre intuitivt enn arbeid med de naturlige tallene. Seethaler, Fuchs, Star, og Bryant (2011) begrunner dette med at prosedyrereglene for arbeid med rasjonale tall er mer komplekse. Dermed vil de også utgjøre en større utfordring. En årsak til dette er som Siegler, Thompson, og Schneider (2011) presenterer: «*Fractions learning is hindered by children being predisposed to assume that each number has a unique successor*.» (Siegler et al., 2011, s. 274). Et heltall har en naturlig etterfølger i tallrekken. For eksempel vil 5 være etterfølgeren av 4. Brøk kan ikke forstås på samme måten.

Tallforståelsen elevene har utviklet kan påvirke elevenes forståelse av brøk. Blant annet er begrepskunnskap knyttet til divisjon av heltall en grunnleggende faktor i forståelsen av brøkbegrepet. Elever strever ofte med å utvide kunnskapen de har om heltall til divisjon av heltall (Naalsund, 2012). Når eleven lærer om brøk møter han en forståelse av at det som gjelder for de naturlige tallene, ikke nødvendigvis gjelder for andre typer tall. (Siegler et al., 2011). Dette kan være forvirrende. For eksempel: om eleven deler to brøker på hverandre, kan han ende opp med noe som er større enn begge dividendene. Dersom man multipliserer to brøker, kan man ende opp med et svar som er mindre enn begge multiplikandene. Dette går i mot det han hittil har lært om divisjon og multiplikasjon av heltall (Jordan et al., 2013).

2.4.2 Symboler

Variabler – x er ukjent

I algebra har en variabel flere funksjoner. Hvilken funksjon som ilegges den variable er knyttet til den oppfattelsen en har av hva algebra innebærer. Man kan se på algebra som en form for generalisert aritmetikk. Da vil variablene ha som funksjon å tydeliggjøre generaliserte mønstre (Kieran, 1989). Med en slik funksjon av variabler, vil algebraisk kompetanse dreie seg om å tilegne seg denne kunnskapen. Videre kan man se på algebra som studiet av prosedyrer. Da vil en variabel være en ukjent. Den algebraiske kompetansen vil da bestå i å forenkle og løse uttrykkene. I tillegg til disse to måtene å se algebra på, omtaler Wagner og Kieran (1989) to til. Algebra kan sees på enten som studiet av forholdet mellom to størrelser, eller som studiet av strukturer. I disse tilnærmingene vil variable fungere henholdsvis som parameter eller som spesifikke objekter som kan tilegnes en eller annen egenskap (Wagner & Kieran, 1989).

Når det er flere måter å oppfatte en variabel på, er det forståelig at dette skaper utfordringer hos elever. Foster (2007) understreker at det er viktig at elever forstår den variable som noe som kan endres, som er i endring. Dette mener han er nødvendig for å kunne jobbe videre med algebra. Videre observerer Welder (2012) at få elever i ungdomsskolealder er i stand til å se på en bokstav som et generalisert tall, og at enda færre ser på bokstaver som variable.

Likhetstegnet

Ketterlin-Geller og Chard (2011) skiver: *«mathematical equality is arguably the most central property of numbers in which students' misunderstanding and application is directly related to algebraic reasoning*" (Ketterlin-Geller & Chard, 2011, s. 73). Dette støttes av Welder (2012). Hun argumenterer for at en begrenset forståelse av hva likhetstegnet betyr er en av de største utfordringene elever møter i arbeid med algebra (Welder, 2012).

Mange elever har fra aritmetikken en forståelse av likhetstegnet som et signal på at svaret kommer på høyre side. Naalsund (2012) fant dette i sin studie. Elevene oppfattet likhetstegnet som et «å gjøre noe tegn», snarere enn et symbol på likhet. Når likhetstegnet brukes i en ligning er det for å illustrere at utrykkene på venstre og høyre side har den samme verdien. At likhetstegnet betyr at to elementer er like er alltid gjeldende. I arbeid med algebra er det ekstra viktig å forstå denne betydningen. Kilpatrick et al. (2001) vektlegger at å se at dette symbolet krever at de to sidene har samme verdi er vesentlig for å forstå den algebraiske bruken. Det er dette Stephens (2006) omtaler som en relasjonell forståelse av likhetstegnet. En relasjonell forståelse av likhetstegnet gjør blant annet at eleven er i stand til å forstå likheten mellom uttrykkene 3(x+4) og 3x +12, ved å se på strukturen. For å kunne regne med mer kompliserte ligninger med operasjoner på begge sider av likhetstegnet, for eksempel 4x+1 = 3x +5, er det nødvendig med en slik forståelse (Stephens, 2006). Da holder det ikke med den forståelsen eleven har med seg fra aritmetikken.

Operasjonssymboler

Andre utfordringer i møte med algebra er at operasjonssymbolene i en ligning ikke nødvendigvis er det som brukes for å løse ligningen. Naalsund skriver at blant annet addisjonssymbolet kan bidra til misoppfattelser (Naalsund, 2012). Dette tydeliggjøres for eksempel i likningen 6x + 3 =15. I aritmetikk vil «+» bety, at de to tallene på hver side skal adderes. Dette er ikke nødvendigvis tilfelle i algebra. For å løse den nevnte likningen må eleven fjerne 3 på begge sider av likhetstegnet, og deretter finne hvilken verdi x har. Å addere 6x og 3 har ingen hensikt i denne oppgaven.

Å forstå relasjonen mellom de aritmetiske operasjonene er essensielt for utviklingen av elevers matematiske kompetanse (Robinson & LeFevre, 2012). Subtraksjon og addisjon er inverse operasjoner. En elev som er i stand til å se denne relasjonen, vil kunne løse 4 + 9 – 9 uten å regne seg frem til svaret. En elev som ikke har forstått denne relasjonen, vil likevel kunne komme frem til svaret. Han vil bare benytte flere trinn i oppgaveløsningen, og dermed legge mer jobb i arbeidet med oppgaven. Å forstå denne relasjonen mellom addisjon og subtraksjon, kan bidra til økt regneflyt.

Det er en tilsvarende invers relasjon mellom multiplikasjon og divisjon. Elever finner det ofte mye vanskeligere å oppnå en begrepsforståelse av denne relasjonen (Robinson & LeFevre, 2012). Dette kan skyldes at multiplikasjon er mer komplekst, og vanskeligere å forstå enn addisjon. I algebra er det viktig å forstå relasjonen mellom operasjonssymbolene, særlig i arbeid med ligninger.

Parenteser

Et annet element som kan gi utfordringer i algebra er bruken av parenteser. I rapporten fra kartleggingsprøver i tallforståelse og regneferdighet fra 2008, fra VG1, leser vi at *«kun en firedel av elevene klarte å regne ut et relativt enkelt regneuttrykk som bestod av flere gangetegn og parenteser»* (Alseth, Throndsen, & Turmo, 2008, s. 31). At så mange elever hadde vanskeligheter med en slik oppgave kan tyde på manglende kunnskap om parenteser. I aritmetikken brukes parenteser blant annet for å understreke hvilke regneoperasjoner som skal utføres først. I algebra, derimot, kreves en mer fleksibel forståelse av parenteser (Welder, 2012). Her må elevene forstå at parenteser også kan benyttes som en multiplikativ operator. Dette, knyttet sammen med regler for regnerekkefølge, er vist å være en stor kilde til forvirring blant elever i arbeid med algebra (Welder, 2012).

2.4.3 Tekstoppgaver

En tekstoppgave kjennetegnes ved at den inneholder ett eller flere spørsmål som må besvares ved å konstruere en modell av de matematiske forholdene i teksten (Nortvedt, 2011). For å kunne løse en tekstoppgave kreves det flere ferdigheter. Ostad (1999) argumenterer for at det er nødvendig med *"både tilstrekkelig utviklet verbale ferdigheter og grunnleggende regneferdigheter"* (Ostad, 1999, s. 68). De grunnleggende regneferdighetene eleven har tilegnet seg danner dermed et grunnlag for hvordan han arbeider med oppgaven.

I skolematematikken møter eleven ulike typer tekstoppgaver. I matematikkdidaktisk forskning skilles det ofte mellom algebraiske tekstoppgaver og aritmetiske tekstoppgaver (Kieran, 1989). Dette er ikke et helt tydelig skille. Kieran (1989) skildrer skillet ved å understreke at i arbeid med aritmetiske oppgaver benytter eleven sjelden likninger som løsningsmetode. Det er en mer formell, algebraisk løsningsmetode. Reed (1999) opererer også med tilsvarende distinksjon. Han understreker at skillet mellom algebraiske og aritmetiske tekstoppgaver avhenger mer av tilnærmingen eleven benytter for å løse oppgaven, snarere enn egenskaper ved oppgaven i seg selv (Reed, 1999). Nortvedt (2011) skriver at mange potensielt algebraiske tekstoppgaver reduseres til aritmetiske tekstoppgaver i det eleven forsøker å løse dem. Elever som har manglende algebraisk kompetanse velger ofte å løse slike tekstoppgaver ved ualgebraiske metoder (Reed, 1999). Å benytte en mer aritmetisk løsningstilnærming er ikke nødvendigvis feil. Problemet kommer dersom valget av løsningsmetode ikke har sammenheng med den matematiske situasjonen som er skildret i teksten (Reed, 1999).

2.4.4 Uformelle vs. formelle strategier

I følge Herscovics og Linchevski (1994) er det et kognitivt gap mellom de elevene som er i stand til å arbeide med en ukjent variabel og de som ikke er i stand til det. En elev som kan utføre operasjoner med den ukjente benytter en formell løsningsstrategi. Det motsatte faller inn under uformelle strategier. I TIMSS-rapporten fra 2011 får vi inntrykk av at elevenes prestasjon i algebra i stor grad bestemmes av graden av formell algebraisk kompetanse (Grønmo et al., 2012). Forfatterne av rapporten legger vekt på at norske elever ser ut til å ha gode resonneringsevner. Det er når det kommer til oppgaver som krever formelle kunnskaper i algebra de møter vanskeligheter (Grønmo et al., 2012). Årsaken til dette skillet kan ligge i at norsk skole i betydelig grad konsentrerer seg om det som kalles «hverdagsmatematikk» (Grønmo, 2013). Et for ensidig fokus på dette kan føre til at den rene, formelle matematikken ikke blir tillagt tilstrekkelig vekt.

Det er nødvendig med kjennskap til og kunnskap om formelle løsningsmetoder/strategier for å løse algebraiske ligninger. Bruk av uformelle strategier kan ta unødig tid, og gir oftere feil svar (Naalsund, 2012). Naalsund observerte i sin studie at 8-klassingene oftere benyttet seg av de uformelle løsningsmetodene. 10-klassingene benyttet flere formelle metoder. Blant annet benyttet 60 % av 10-klassingene den såkalte «flytt- og -bytt» -strategien, der de flytter leddene over på andre siden av likhetstegnet, og bytter fortegn (Naalsund, 2012). Med dette i bakgrunn er det grunn til å anta at 1P-elever på videregående vil velge formelle metoder fremfor uformelle. Det er likevel ikke sikkert.

Kieran (1989) presiserer at den ligningsløsningsprosedyren som går under navnet «flytt og bytt» ikke er hensiktsmessig, dersom det ikke vektlegges hvorfor man kan utføre ligningsløsningen på denne måten. Dette begrunner hun i at denne metoden i seg selv ikke understreker symmetrien i ligningen (Kieran, 1989). Denne symmetrien, knyttet til likhetstegnet, er essensiell å forstå for å kunne løse mer avanserte ligninger. Å benytte denne prosedyren, uten refleksjon rundt hvorfor den kan benyttes kan være begrensende på den algebraiske kompetansen.

2.5 Oppsummering av teorikapittelet

Flere internasjonale tester har vist at det er viktig å se nærmere på norske elevers algebraiske kompetanse (se blant annet Grønmo et al., 2012). Denne kompetansen består av flere komponenter. Kilpatrick et al. (2001) og Tolar et al. (2009) argumenterer begge for at flyt, henholdsvis prosedyreflyt og regneflyt, spiller en avgjørende rolle for elevenes matematiske kompetanse, og da særlig i forhold til algebra. Prosedyreflyt inneholder regneflyt og prosedyrekunnskap. Sammen med begrepsforståelse danner disse komponentene et viktig grunnlag for algebraisk kompetanse.

Overgangen fra aritmetikk til algebra kan være vanskelig for mange elever. Algebraisk tankegang er mer abstrakt enn aritmetisk. I tillegg viser det seg at manglende aritmetisk kompetanse kan skape utfordringer i arbeid med algebra. Grunnleggende kunnskaper om negative tall og brøk er en nødvendig forutsetning for å kunne prestere godt i algebra. Den kunnskapen eleven har om de positive heltallene lar seg ikke nødvendigvis overføre til de rasjonale tallene. De rasjonale tallene er mer kompliserte å forholde seg til. Negative tall er mindre intuitive enn de positive heltallene. En elev med manglende kunnskap om brøk og negative tall vil kunne møte problemer i løsning av ligninger som inneholder disse elementene. Som Kilhamn (2011) understreker kan disse problemene vel så gjerne skyldes tilstedeværelsen av for eksempel negative størrelser, snarere enn ligningens struktur alene. I tillegg er det vist at manglende begrepsforståelse av elementer som variable, likhetstegn, operasjonssymboler og parenteser kan bidra til utfordringer i arbeid med ligninger.

3 Metode

I dette kapittelet redegjøres det for den metodiske tilnærmingen, gjennomføringen og datainnsamlingen. Valgene som er tatt, drøftes underveis.

3.1 Kort overordnet presentasjon av studien

Tema for dette masterprosjektet er utfordringer 1P-elever møter i arbeid med algebra. Problemstillingen fokuserer på graden av flyt i elevenes arbeid med algebraoppgaver. Med bakgrunn i dette er det valgt en kvalitativ tilnærming til prosjektet. Metoden som er valgt er intervju. Dette vil bli beskrevet nærmere videre i kapittelet.

Studien består av oppgavebaserte intervjuer med fire 1P- elever fra første trinn på videregående.

3.2 Valg av metode

Temaet belyses ved en kvalitativ tilnærming. Det begrunnes i at det er prosesser og tanker elevene har i og rundt egen oppgaveløsning som er i fokus. En kvalitativ tilnærming kan bidra til å belyse elevenes løsningsprosess mer inngående, siden den gir mulighet til å gå mer i dybden på få informanters arbeid med algebra. En kvantitativ tilnærming vil på den andre siden kunne belyse likhetstrekk, mønstre og sammenhenger for større grupper av informanter. Når det er elevenes begrunnelser og tanker som er sentralt, er det dermed i denne masteroppgaven mer hensiktsmessig med en kvalitativ tilnærming.

I en kvalitativ tilnærming er det vanlig å benytte intervju eller observasjon som datainnsamlingsmetode. Med bakgrunn i problemstillingen er intervju valgt som hovedmetode. Kvale og Brinkmann (2009) omtaler det kvalitative intervjuet som en tilnærming som *«søker å forstå verden sett fra intervjupersonenes side»* (Kvale & Brinkmann, 2009, s. 21). Siden fokuset i oppgaven ligger på valg elever tar i forbindelse med oppgaveløsningen, og hvorfor de tar disse valgene, er en slik metodetilnærming gunstig. Intervjusituasjonen åpner for å stille oppklarende spørsmål vedrørende oppgaveløsningen, dersom det er noe som er uklart. Dette kan bidra til å belyse mer av elevenes forståelse av algebra, enn å bare se hva de har svart. Intervju som datainnsamlingsmetode åpner dermed for data som er aktuelle å undersøke med hensyn til masteroppgavens problemstilling.

Det hadde vært en mulighet å velge kun observasjon som tilnærming, der forskeren er mer eller mindre deltakende utfra de rammekriteriene som er satt opp (Johannessen, Tufte, & Kristoffersen, 2010). For eksempel å observere elevenes arbeid med oppgavene. Det ville gitt et innblikk i hvordan eleven arbeider, og hvilke prosedyrer som velges. Observasjon alene ville ikke kunne gi svar på hvorfor elevene valgte de ulike prosedyrene, og hva de reflekterte rundt dem. I tillegg undersøkes graden av flyt, som på flere måter er knyttet til elevens begrepsforståelse (se 2.2.3). For å måle elevens forståelse av prosedyrene, er det nødvendig å kunne stille oppfølgingsspørsmål der noe er uklart eller der det er av interesse å høre mer om elevens tanker rundt et begrep eller en prosedyre. Observasjon som metode ville ikke være tilstrekkelig, på grunn av at det ikke er rom for forskerens spørsmål rundt oppgaveløsningen (Johannessen et al., 2010).

3.3 Intervjuform

Dalen (2004) presiserer at hvilken form for intervju som velges alltid må sees i forhold til det temaet forskeren ønsker å belyse. Intervjuformen i denne masteroppgaven er et semistrukturert, oppgavebasert intervju. Et oppgavebasert intervju er et kvalitativt intervju som er fastsatt rundt et sett med oppgaver, som informanten blir bedt om å løse. Nedenfor vil denne intervjuformen utdypes.

Det skilles mellom strukturerte, semistrukturerte og ustrukturerte intervju. Det strukturerte intervjuet følger en forhåndsbestemt mal, en fastgitt intervjuguide, som danner rammen for alt som skjer i intervjuet. I denne formen for intervju er det lite rom for andre innspill. Et ustrukturert intervju har ingen forhåndssatte rammer eller spørsmål. Her er det vanskelig å forutse hva som til komme frem av materiale under intervjuet. Samtidig kan det danne grunnlaget for mer åpne, frie samtaler med informantene. Intervjuformen i denne oppgaven ligger midt mellom disse. Et semistrukturert intervju vil både kunne sette noen rammer rundt intervjuet, samtidig som det gis rom til elevens frie oppgaveløsning. For å kunne si noe om informantenes svar i forhold til hverandre, er det nødvendig med noen rammer. Disse rammene kommer i form av oppgavesettet som alle informantene får utdelt i begynnelsen av intervjuet. På den måten kan det dannes et sammenligningsgrunnlag ved de ulike intervjuene.

På den andre siden er det viktig at informantene får løse oppgavene på sin egen måte. En for stram struktur på intervjuet vil kunne sette en stopper for den frie oppgaveløsningen. Den frie oppgaveløsningen er en viktig kilde til informasjon om elevens kunnskaper. Det er dermed hensiktsmessig å benytte et semistrukturert oppgavebasert intervju som datainnsamlingsmetode.

Oppgavebaserte intervjuer er et godt verktøy for å kunne innhente data, både om løsningsprosessen og om elevenes oppførsel og refleksjon rundt arbeidet (Goldin, 2000). De kan bidra til å belyse elevens kunnskap, problemløsningsmetoder og resonnement (Koichu & Harel, 2007). Oppgavebaserte intervjuer bidrar med en strukturert arena. Denne kan til en viss grad kontrolleres. Det er dermed rom for elevens egen tilnærming til oppgaveløsningen. Samtidig gir de en unik mulighet til å se nærmere på elevenes arbeid.

Oppgavebaserte intervjuer kan gjennomføres på to ulike måter, omtalt som «sette» og «usette» hos Houssart og Evans (2011).[1] «Sette» intervjuer innebærer at eleven diskuterer oppgaver han allerede har arbeidet med før intervjuet, mens de «usette» innebærer at oppgavene er presentert for første gang i selve intervjuet (Houssart & Evans, 2011). Jeg har valgt å gjennomføre «usette» intervjuer. Hovedgrunnen til dette ligger i at det er den spontane tilnærmingen til oppgaveløsningen jeg er interessert i. Ikke den de har øvd seg opp i før de kommer på intervjuet. Houssart og Evans (2011) understreker at «*(...) unseen questions constitute an effective tool for exploring how children respond to a question.*» (Houssart & Evans, 2011, s. 78). Dette er utgangspunktet for valget av en «usett» tilnærming til oppgavene i det oppgavebaserte intervjuet.

3.4 Presentasjon av utvalget

Utvalget av informanter består av fire 1P-elever fra samme klasse på en videregående skole i Oslo. Det er to gutter og to jenter. Det er ikke noe godt fasitsvar på hvor mange informanter som er nok i en kvalitativ studie. Dette skyldes at det er vanskelig å avgjøre på forhånd hvor mange intervjuer man må gjennomføre for å få nok datamateriale (Johannessen et al., 2010). Det var ønskelig med fem informanter, da det kunne gi en del materiale å jobbe med. Andre faktorer som spilte inn var tid. Fem informanter var derfor gunstig av hensyn til tiden som var til rådighet.

[1] Min oversettelse. De skiller mellom «seen» og «unseen»

Det var helt frivillig å delta, og det ble spesifisert at det var full mulighet for å trekke seg dersom en ombestemte seg.[2] En av dem som meldte seg i rekrutteringsfasen, ombestemte seg etter kort tid. Det endelige antallet informanter er derfor fire.

Etter å ha gått gjennom det allerede innsamlede datamaterialet, avgjorde jeg at det var nok materiale å arbeide med. Alle fire informantene har gått i samme klasse, med samme lærer, i flere måneder. Når alle informantene er fra samme læringsmiljø gis det mulighet for å se etter eventuelle likheter i datamaterialet, for deretter å drøfte dem opp mot hverandre.

3.4.1 Utvalgskriterier

Informantene skulle være fra en videregående skole i Oslo. Dette var først og fremst av praktisk hensyn. Johannessen et al. (2010) omtaler dette som et «bekvemmelighetsutvalg». Videre skulle de gå første trinn på videregående, og ta 1P. I læreplanen for matematikk fellesfag leser vi at etter 10.årssteg skal eleven kunne *«behandle og faktorisere enkle algebrauttrykk, og rekne med formlar, parentesar og brøkuttrukk med eitt ledd i nemnaren»* og *«løyse likningar og ulikskapar av første grad»* (Utdanningsdirektoratet, 2010, s. 8). Det er med andre ord et mål om kompetanse innen grunnleggende algebra allerede før videregående. Dermed er det mulig å forvente at en 1P-elev har noen grad av måloppnåelse i forhold til algebraisk kompetanse.

Dette var de overordnede utvalgskriteriene. Andre kriterier var at informantene hadde middels måloppnåelse i faget. Dette tilsvarte at de lå på en 3-er eller en svak 4-rer på karakterskalaen. Det var en nødvendig forutsetning at informantene hadde en viss kompetanse i faget, slik at ikke oppgavene fremstod som umulige. Informanten skulle ikke oppleve intervjusituasjonen som ubehagelig og for vanskelig. I tillegg var det nødvendig med en viss grad av matematisk kompetanse hos informanten for å kunne måle graden av flyt i arbeidet med algebra.

De fire informantene er alle 1P-elever. Det er to gutter og to jenter. Av anonymitetshensyn har jeg gitt dem navnene Marius, Per, Trine og Ragnhild. Dette er helt tilfeldig plukkede navn, som ikke har noen tilknytning til informantenes opprinnelige navn. Rekrutteringsprosessen omtales i 3.6.2.

[2] Se vedlegg 2: orienterings- og samtykkebrev

3.5 Presentasjon av oppgavesettet

Oppgavesettet som ble gitt informantene bestod av fem oppgaver. Noen av dem er hentet fra Naalsund (2012) doktoravhandling *«Why is algebra so difficult?»*, med tillatelse fra forfatteren.[3] Oppgavene som er hentet derfra er godt gjennomarbeidet og utprøvd. Å benytte disse kan bidra til å styrke datamaterialet. Det gir også mulighet for å drøfte funnene i denne studien opp mot Naalsunds funn.

De resterende oppgavene har jeg laget selv. Dette ble gjort med utgangspunkt i kompetansemålene fra matematikk på ungdomsskolen og for matematikk fellesfag på videregående. Alt er gjort med bakgrunn i teori om algebraisk kompetanse, slik som presentert i kapittel 2. Etter at oppgavesettet var ferdig utformet, ble det gjennomført flere prøveintervjuer. Dette er omtalt mer utførlig i 3.6.1.

Oppgavesettet skulle måle basisferdigheter i arbeid med algebra. Dette knyttes blant annet opp til det Grønmo (2013) mener om at det kan virke som om basisferdighetene i algebra er blitt forsømt for elevene i grunnskolen.

I tillegg skulle det måle elementer ved algebraen som mange elever finner utfordrende (se 2.4). Dette tar utgangspunkt i aktuell teori på området. I dette avsnittet vil jeg presentere de ulike oppgavene og redegjøre for hvorfor de ble valgt.

3.5.1 Oppgave 1

Den første oppgaven er selvlaget. Den består av fem deloppgaver, der de fire første måler elevens tallkunnskaper og aritmetisk prosedyreflyt. Den siste måler elevens forståelse av likeverdighetsbegrepet i arbeid med brøk. En redegjørelse for dette vil komme senere. I hele oppgave 1 er hoderegning en faktor. God hoderegning er en indikator på god regneflyt. Informanten får ikke ha med seg kalkulator, eller andre tekniske hjelpemidler. Dette er for å kunne måle hvorvidt informanten har automatisert de grunnleggende tallferdighetene og regneoperasjonene. Tolar et al. (2009) og Ketterlin-Geller og Chard (2011) presiserer at elever med manglende automatisering møter større utfordringer i arbeid med algebra.

[3] Se vedlegg 4: kopi av mailkorrespondanse

Dersom informanten ikke tar beregningen i hodet, er det interessant å se hvilken strategi som ble benyttet. Intervjuer vil se etter om de teller på fingrene, skriver/tegner på arket, eller om de benytter en helt annen strategi.

Deloppgavene a) – d) måler informantens kunnskap om regnerekkefølge. De måler også elevens symbolkunnskap og kunnskap om tall. I a) og b) møter informantene parenteser. Dette er, som drøftet i teoridelen, et element som kan bidra til utfordringer i arbeid med algebra. Hvorvidt informanten har kunnskap om hvorfor disse reglene/prosedyrene kan benyttes er relevant å undersøke. I tillegg undersøkes informantens kunnskap om regnerekkefølge. Årsaken til at dette er relevant ligger blant annet i det Welder (2012) presiserer. Hun skriver at regler for regnerekkefølge er vist å være en stor kilde til forvirring. I arbeid med algebra, for eksempel ligninger, møter eleven flere operasjoner som må utføres for å løse ligningen. For å finne riktig løsning, og for å løse ligningen på en hensiktsmessig måte, er dermed kunnskap om regnerekkefølge viktig.

Oppgave 1

Regn ut

a)

$(9+3-6)\cdot 3-11$

b)

$\frac{(3+5)}{4}$

c)

$\frac{32}{8}\cdot 4-2$

d)

$121-5\cdot 2+2(10-8)$

e)

Hvilke av brøkene nedenfor er likeverdige?

$\frac{2}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{25}, \frac{5}{25}, \frac{11}{23}, \frac{6}{8}, \frac{3}{6}, \frac{5}{9}$

Figur 1: Oppgave 1

Flere av deloppgavene måler brøkkompetansen hos informantene. Brøk essensielt i tilegnelsen av algebraisk kompetanse (Jordan et al., 2013). Derfor ligger fokuset på informantens begrepsforståelse av brøk. Oppgave e) måler informantens forståelse av likeverdighetsbegrepet. Dette er et grunnleggende begrep i arbeid med brøk, og informantens forklaring på hva likeverdighet innebærer kan illustrere hvilken forståelse han har av brøk.

3.5.2 Oppgave 2

Dette er en tekstoppgave jeg har laget selv. Det

Oppgave 2

Ola, Siri og Maren skal til syden på ferie. De har med seg tilsammen 30 kg bagasje. Ola bærer 5 kg mer enn Maren, som bærer dobbelt så mye som Siri. Hvor mange kg bærer hver av dem?

Figur 2: Oppgave 2

er tatt med en tekstoppgave i oppgavesettet med bakgrunn i Ostad (1999). Han presiserer at tekstoppgaver ofte er en utfordring for elevene. Det ble fokusert på hvilken løsningsmetode informantene benyttet. Det er mulig å løse denne på to måter; aritmetisk og algebraisk. En elev som velger å løse den aritmetisk vil for eksempel sette opp tallene og se dem i forhold til hverandre. En annen mulighet vil være å benytte «prøve og feile»-metoden, for å finne et svar som passer. Ved å gjenkjenne noe som den ukjente, sette opp en ligning og løse den, benytter han seg av en algebraisk løsningsmetode.

En kritikk mot oppgaven, sett i ettertid, må være at situasjonen nok ikke er helt realistisk. Man har ofte med seg mer enn 5 kg bagasje på reise, og det er vel snarere oftest slik at det ikke er gutta som bærer mest bagasje. Hunting (1997) presenterer flere hensyn som bør ligge til grunn for valg av oppgaver i et intervju. En av dem er kontekst. Han skriver: «*The task should require the student to bear mathematical thinking but should be framed in a setting that is realistic to the student, if possible*» (Hunting, 1997, s. 152) Jeg valgte likevel å beholde den, siden tallene lot seg greit regne med, og ingen av prøveinformantene[4] så ut til å la seg merke med det.

3.5.3 Oppgave 3

Oppgave 3 er hentet fra Naalsund (2012), der den skulle måle informantenes evne til å forenkle algebraiske uttrykk. Å kunne gjenkjenne et algebraisk uttrykk som noe annet, eller å kunne forenkle ett uttrykk med flere ukjente, kan gi en indikasjon på begrepsforståelse rundt variabler. Det er godt dokumentert at variable er et utfordringselement for elever i arbeid med algebra (se blant annet Foster, 2007; Kieran, 1989; Welder, 2012). I tillegg så Naalsund (2012) at flere elever overgeneraliserte fra aritmetikk og algebra. Når de skulle forenkle uttrykkene, gjorde de feil som kunne tilsi manglende begrepsforståelse rundt variabler (Naalsund, 2012).

Oppgave 3

Hvilket av følgende uttrykk er det samme som $2x - 3y + 7x + 5y$:

- $5x + 2y$
- $5x + 8y$
- $9x + 2y$
- $9x + 8y$

Figur 3: Oppgave 3

[4] Prøveintervju er omtalt i 3.6.1

Informantens første reaksjon på oppgaven vil si noe om forståelsen av de ulike symbolene i uttrykket. Å kunne forenkle uttrykket vitner også om prosedyrekunnskap. Intervjuer undersøkte hvor mye tid informanten bruker på oppgaven. Fokuset vil ligge på hvorvidt det er noe som må jobbes en del med, eller om informanten har automatisert ferdigheter som han tar i bruk for å løse oppgaven.

3.5.4 Oppgave 4

Den fjerde oppgaven i settet er hentet fra Naalsund (2012). Hun skriver at de ulike ligningene var valgt for å fange opp spesifikke, veldokumenterte utfordringer i elevers arbeid med algebra (Naalsund, 2012). Ligningsoppgavene måler elevenes kompetanse i forhold til likhetstegnet, brøk, regning med store tall, parenteser og rekkefølge, og variable. Prosedyreflyt i arbeid med ligninger blir også målt.

Oppgave 4 er satt sammen av seks førstegradsligninger. a) og d) er aritmetiske ligninger, med små og store heltall. Disse kan løses enten ved bruk av uformelle metoder (aritmetisk tilnærming) eller formelle metoder (algebraisk tilnærming). Velger informanten for eksempel å gjette seg frem til en mulig x, er dette et eksempel på en uformell løsningsmetode. En mer formell løsningstilnærming vil være å løse ligningen med hensyn på x.

Oppgave 4

Løs ligningene. vis hva du gjør

a)

$2x + 3 = 9$

b)

$\frac{1}{2}x = x - 4$

c)

$3x + 4 = x - 8$

d)

$6x + 370 = 1500$

e)

$4(x + 5) = 8$

Figur 4: Oppgave 4

De andre deloppgavene er algebraiske ligninger på formen «*ax +b = cx + d*» og «*ax=bx+d*». For å løse disse ligningene, kan informanten velge å resonnere seg frem. Dette vil være en mer uformell løsningstilnærming. I denne ligningstypen er det ikke like enkelt å prøve seg frem til en mulig x, slik som i de aritmetiske ligningene. På grunn av den mer kompliserte strukturen vil en mer hensiktsmessig tilnærming være å benytte seg av mer formelle prosedyrer for løsning av ligninger. Oppgavene måler informantens prosedyrekunnskap i forhold til førstegradsligninger, men også begrepsforståelse rundt elementer som variabler, likhetstegnet, brøk og operasjonssymboler.

Likningen i e) inneholder også en parentes. Parenteser, kombinert med regnerekkefølge, er ansett som en stor utfordring i arbeid med algebra, særlig med ligninger (se blant annet Welder, 2012). For å løse denne deloppgaven må informanten først løse opp parentesen på venstre siden, og deretter løse ligningen med hensyn på x. Naalsund (2012) observerte i sin studie at flere elever fant dette vanskelig, også på 10. trinn.

Ligningen i deloppgave f) inneholder en brøk, noe som i seg selv innebærer en utfordring (se 2.4.1). I tillegg er den ukjente under brøkstreken. Måten informanten velger å løse denne deloppgaven på forteller noe om hvorvidt han har forstått hva som ligger bak prosedyrene, hva likhetstegnet innebærer.

I tillegg til å møte utfordringselementer i algebra, måler oppgavesettet informantens prosedyreflyt. Jeg ville undersøke hvor mye informanten hadde automatisert, og hvilken grad av flyt som preget arbeidet.

3.5.5 Oppgave 5

Den siste oppgaven er også hentet fra Naalsund (2012). Denne kan løses på forskjellige måter, både formelt og uformelt. Å be om at informanten viser og forklarer hva han gjør underveis kan gi innsikt både i informantens løsningstilnærming, og metakognisjon.

Oppgave 5

Finn n når

$$\frac{12}{n} = \frac{36}{21}$$

Vis hva du gjør

Figur 5: Oppgave 5

3.6 Gjennomføring og datainnsamling

3.6.1 Prøveintervju

For å teste ut oppgavesettet og de ulike spørsmålstypene, valgte jeg å gjennomføre tre prøveintervjuer. Goldin (2000) presenterer gjennomføringen av flere prøveintervju som ett av flere grep forskeren kan ta for å øke kvaliteten på studien. I det første intervjuet var et familiemedlem informant. Hensikten var å teste ut hvordan det opplevdes å være intervjuer. Det var helt ukjent å være i den rollen. For å kunne styrke datamaterialet, og unngå å forurense det, er det nødvendig at intervjuer er godt forberedt (Kvale & Brinkmann, 2009).

Spørsmålene og opplegget må være godt gjennomarbeidet. I tillegg er det viktig at intervjuer er forberedt på sin egen rolle. Å gjennomføre et prøveintervju, der fokuset lå på min rolle og utførelsen av den, bidro til å gjøre med meg tryggere på situasjonen. Bevisstheten rundt egen rolle ble økt, noe som var av betydning for de senere intervjuene.

De to neste prøveintervjuene var for å teste oppgavesettene og rammen rundt det oppgavebaserte intervjuet. To «prøveinformanter» meldte seg frivillig. De oppfylte samme kriterier som det endelige utvalget. Etter at oppgavene var løst og prøveintervjuet gjennomført, ba jeg «prøveinformantene» om tilbakemelding på oppgavene. Tilbakemeldingene gjaldt vanskelighetsgrad på oppgavene, tidsbruk og opplevelse av intervjusituasjonen. De var stort sett positive og bidro til å styrke valget av oppgavesammensetningen. Etter at prøveintervjuene var gjennomført, valgte jeg å fjerne en av de opprinnelige oppgavene i settet, slik at det stod igjen de fem oppgavene som er presentert her. Hunting (1997) omtaler at et overordnet mål for et intervju er å få frem mest mulig informasjon innen en gitt tid. Det er derfor viktig å kunne gjenkjenne når informanten har nådd grensen for sin konsentrasjon (Hunting, 1997). Når denne grensen er nådd, er det ikke lenger hensiktsmessig å fortsette det oppgavebaserte intervjuet. Etter 45 minutter var prøveinformantene blitt mindre fokusert, og virket slitne. Det var dermed ikke hensiktsmessig å la intervjuet vare stort lengre enn dette. Ved å kutte en av oppgavene, ble tidsrammen for intervjuet på rundt 40 minutter.

Under prøveintervjuene ble prøveinformantene stilt spørsmål om de foretrakk video- eller audioopptak. Alle svarte at audioopptak var å foretrekke.

3.6.2 Den første kontakten – Rekrutteringen

Da utvalgskriteriene var etablert, kontaktet jeg NSD. Etter behandlingstid kom det svar om at studien ikke var meldepliktig. Studien ble tildelt prosjektnummer 33814[5]. Deretter ble flere videregående skoler i Oslo kontaktet. Ønsket var å komme i kontakt med en 1P-lærer ved en skole som tilbød studiespesialiserende retning. En 1P-lærer sa seg villig til å la meg disponere noen minutter av en matematikktime.

[5] Se vedlegg 1: Brev fra NSD

Rekrutteringsprosessen bestod av en kort muntlig presentasjon av forskningsprosjektet, etterfulgt av informasjon om utvalgskriterier og hva det ville innebære å være informant. Elvene som meldte seg fikk utdelt orienterings- og samtykkebrev[6], og det ble avtalt tidspunkt for gjennomføring av intervju.

3.6.3 Gjennomføring av intervjuer

Praktisk gjennomføring

Dagen før intervjuet, ble det sendt ut tekstmelding til informantene med påminnelse om avtalt tid og sted. Johannessen et al. (2010) anbefaler dette som et trinn i rekrutteringsprosessen, for å sikre at det ikke oppstår misforståelser rundt tidspunktet, samt sikre at ting går som planlagt.

I forkant av alle intervjuene ble det reservert et rom på UIO som kunne låses. Det var ønskelig at det ikke oppstod noen forstyrrelser mens intervjuet pågikk. Før intervjuet startet, hadde jeg en kort samtale med informanten, der det ble repetert en del av det som ble sagt under rekrutteringen. Det ble presisert at det var helt frivillig å stille, og at dersom de syntes det var ubehagelig kunne intervjuet stoppe. Dette ble gjort for å tilrettelegge for en trygg atmosfære. Mer om dette under avsnittet om forskningsetikk.

Jeg gikk igjennom kort hva som skulle skje, og viste frem lydopptakeren. Ingen av informantene hadde noe problem med at det ble foretatt lydopptak. Både under rekrutteringen og i denne samtalen ble det presisert at det kun var jeg som skulle høre på lydopptakene.

Deretter fikk informanten utdelt oppgavesettet, en bunke med ark og penn eller blyant, alt etter eget ønske. Informanten ble gitt noe tid til å se gjennom oppgavesettet, før oppgaveløsningen startet.

Dersom informanten ikke opplevde noen vansker med oppgavene, ble jeg stort sett sittende og følge med. Jeg nikket, smilte, eller svarte bekreftende når jeg fikk et spørsmål om bekreftelse eller et spørrende blikk. Noen av informantene krevde mye slik bekreftelse, mens andre jobbet stort sett selvstendig. For å opprettholde driven i oppgaveløsningen, valgte jeg noen ganger å svare mhm, bekreftende, eller nikke. Dette var for å gi informanten positiv tilbakemelding, slik at han fortsatte prosessen. Denne formen for tilbakemelding omtales som

[6] Se vedlegg 2: Orienterings- og samtykkebrev

støtte i analysen. Dette kan under noen omstendigheter være en ulempe. Dette vil drøftes under validitetskapittelet (3.8).

Dersom det falt seg naturlig, eller det ble behov for det, valgte jeg å stille oppfølgingsspørsmål. Dette skrives det mer om i neste avsnitt.

Da intervjuet var avsluttet, ble opptakeren skrudd av, og informanten ble takket for at de hadde tatt seg tid. Deretter skrev jeg et refleksjonsnotat. Poenget med dette var å få ned de umiddelbare tankene og innspillene som hadde kommet frem under og etter intervjuet. Det var ønskelig å få det ned på papiret ferskest mulig, for å ha bredere materiale til analysen. Dette er et grep anbefalt av Nilssen (2012) i arbeid med kvalitative studier.

Spørsmålsstilling underveis

Ved kvalitative studier er det nødvendig at forskeren er åpen for det uforutsette. Under intervjuet er det mulig for intervjuer å stille spørsmål der det faller seg naturlig. Dette kan være dersom noe er uklart, eller dersom det er behov for å komme et steg videre i prosessen. For å unngå å «lede» informanten i oppgaveløsningen, er det viktig at intervjuer har evne til å følge et mangfold av vinklinger og utfall ved problemløsninger, avhengig av hva som faktisk skjer (Goldin, 1997). Det er dette Dalen (2004) omtaler som fleksibilitet i forskningsdesignen (Dalen, 2004). Med andre ord: for å få et godt intervju er det viktig at intervjueren er forberedt på flere mulige utfall av problemene som gis og spørsmålene som stilles. Siden jeg ikke hadde lang erfaring på området, og det ble valgt en semistrukturert tilnærming, var det viktig å få en oversikt over ulike spørsmålstyper.

I gjennomføringen av et oppgavebasert intervju er det viktig at intervjuer er seg bevisst de innspillene som gis informanten underveis. Goldin (2000) beskriver fire stadier av oppgaveløsningen til hver oppgave i intervjuet. Det første stadiet kjennetegnes av fri problemløsning. Her er det viktig at informanten får tilstrekkelig med tid til å svare (på egenhånd). Goldin understreker viktigheten av å gi tid til den frie problemløsningen. Dersom ikke informanten får jobbe selvstendig uten stadige innspill, kan dette føre til tapt materiale rundt løsningsprosessen. Samtidig må det ikke være slik at informanten mister fremdriften i arbeidet. Da er det nødvendig med noe veiledning (Goldin, 2000). I dette første stadiet stilles det kun indirekte oppfølgingsspørsmål der det blir nødvendig. Et eksempel på et slikt spørsmål kan være *«Kan du fortelle meg mer om det?», «Hva ser du her?»* eller *«Hva tenker du å gjøre her?»*.

Det neste stadiet inntrer hvis informanten ikke gir noen spontane svar, eller hvis indirekte spørsmål ikke gir noen respons. Da kan intervjuer komme med få, heuristiske spørsmål eller forslag. Dette er for å hjelpe informanten litt på vei, med minimal innblanding. Eksempler på spørsmålstyper fra det andre stadiet er: *«Hva er det du skal finne?», «Hva er det første du vil gjøre her?»* eller *«Kan du gjenkjenne denne som noe annet?»*. Det er viktig at informanten selv får mulighet til å komme til en løsning så langt det går. Dersom det stopper opp og informanten ikke gir noen respons på det andre stadiet, går vi over til det tredje.

Det tredje stadiet er kjennetegnet ved *«the guided use of heuristic questions»* (Goldin, 2000, s. 523). Her er intervjuer litt mer aktiv enn i forrige stadium, men likevel bare når nødvendig. Et eksempel på et slikt spørsmål kan være: *«Kan du si noe om hva den x-en betyr der?»*.

Det siste stadiet kjennetegnes av mer utdypende, metakognitive spørsmål av typen «*Hvis du skulle bruke det samme som i forrige oppgave på denne, hva ville du gjort da?*». I dette stadiet er det også rom for mer direkte hjelp, uten at det fratar informanten muligheten til å finne en løsning på egenhånd.

Disse fire stadiene ble brukt som veiledning i utføring av intervjuet[7]. Målet med intervjuene var ikke at informantene skulle få til mest mulig riktig, men å få belyst arbeidsprosessen deres. Det var derfor nødvendig å kunne gripe inn der informantene stod fast, for å komme et skritt videre.

3.7 Prosedyrer for analyse

Lydopptakene var av god kvalitet. Det gjorde det mulig å få skrevet ut fyldige transkripsjoner av intervjuene. Transkripsjonsnøkkelen som ble benyttet er skildret på siden her. I tillegg til transkripsjonene bestod datamaterialet av informantenes skrevne løsningsforslag. Analysen av transkripsjonsnotatene er nært knyttet opp mot

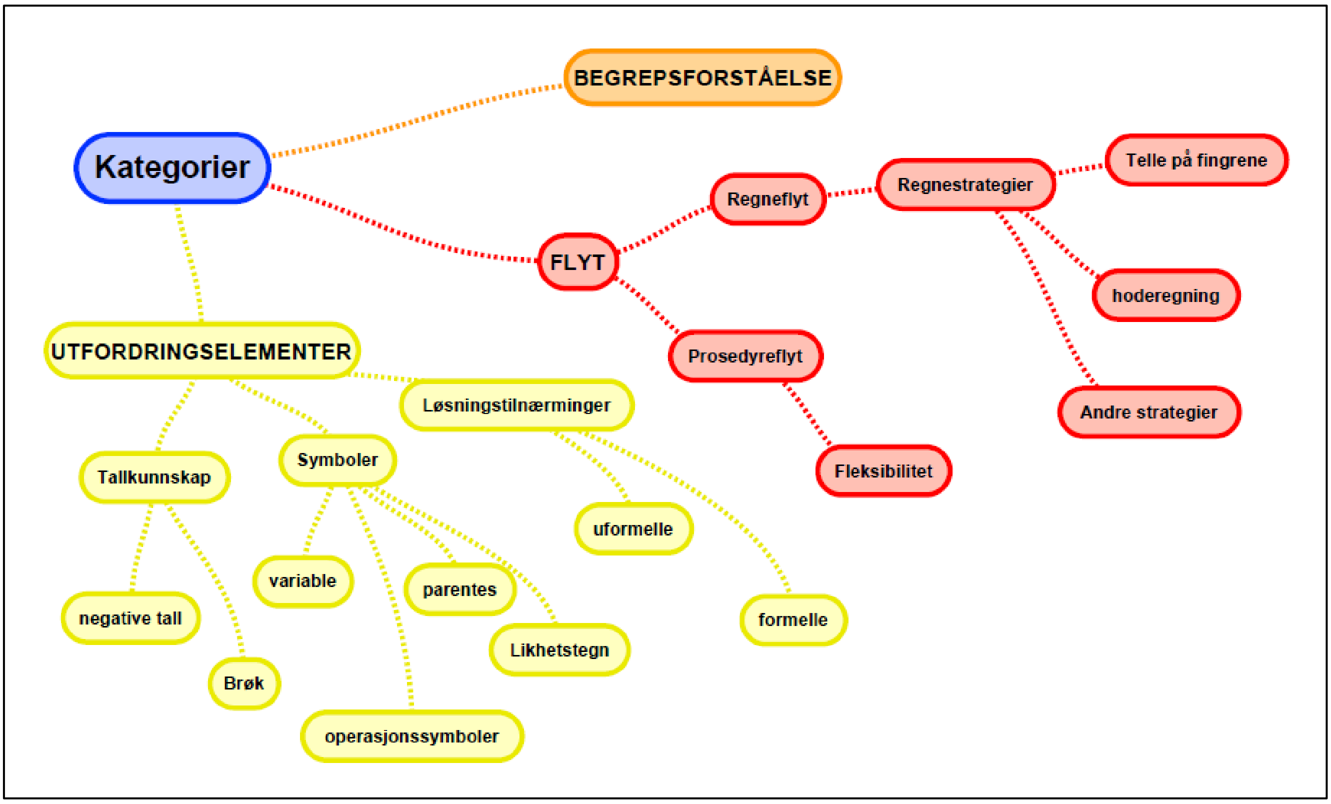
… Pause på ca. tre sekunder
(…) lengre pause
[…] samtidig tale
{} uklart
… handling

Figur 6: Transkripsjonsnøkkel

[7] Se «mal» ved

analysen av disse oppgaveløsningene.

Rammen denne studiens data fortolkes inn i dannes av de teoretiske begrepene som er redegjort for i teorikapittelet. Både Leiulfsrud og Hvinden (1996) og Goldin (1997) skriver at resultatene av god samfunnsvitenskap alltid bør tolkes i lys av en teoriramme. Det var derfor nødvendig med et teoretisk rammeverk.



Figur 7: Kategorier for analyse

I arbeidet med analysen ble dataene først sortert inn i tre hovedkategorier; flyt, begrepsforståelse og utfordringselementer. Deretter ble disse kategoriene brutt ned i underkategorier. I figuren på neste side er hovedkategoriene gitt hver sin farge. Dette for å illustrere hva som hører inn under hver hovedkategori. Kategoriinndelingen er gjort med utgangspunkt i begrepene som er presentert i teorikapittelet. Både begrepsforståelse, flyt og utfordringselementer var relevante kategorier i forbindelse med datamaterialet. I analysen av datamaterialet ble merkelappen begrepsforståelse satt på data som indikerte enten god eller dårlig begrepsforståelse. Videre ble flyt – kategorien delt inn i regneflyt og prosedyreflyt. Som underkategori til prosedyreflyt ligger fleksibilitet. Dette er en viktig komponent i utviklingen av god prosedyreflyt. Underkategorien til regneflyt, regnestrategier, kan gi en pekepinn på grad av regneflyt hos informanten.

Den siste, og den største, hovedkategorien, var utfordringselementer. Dette er en paraplykategori, der flere elementer faller under; symboler, tallfakta og løsningstilnærminger. Det ble undersøkt hvorvidt begrepsforståelsen av disse utfordringselementene påvirket flyten i arbeidet med oppgavene.

Selve analysearbeidet ble gjort etter at alle intervjuene var ferdig transkribert. Med andre ord var analyseprosessen fraskilt fra datainnsamlingsprosessen. Transkripsjonsnotatene ble koblet opp mot informantenes skrevne løsningsforslag, og dataene ble plassert inn i analysekategoriene som beskrevet ovenfor. I første omgang ble det lagt vekt på å se mønstre og likheter i de ulike oppgaveløsningene. Deretter ble dataene i informantenes svar analysert, og knyttet opp mot det teoretiske rammeverket. I arbeidet med denne studien har jeg hatt både rollen som intervjuer og den som har utført analysen. I analysekapittelet omtales rollen min som «intervjueren». Dette er et grep som er tatt for å bedre kunne se datamaterialet litt «utenfra». Mer om dette i validitetskapittelet.

3.8 Validitet

Kvale og Brinkmann (2009) understreker at *«validitet i samfunnsvitenskapelig forskning dreier seg om hvorvidt en metode er egnet til å undersøke det den skal undersøke»* (Kvale & Brinkmann, 2009, s. 250). Forskningsspørsmålet i denne masteroppgaven fokuserer på graden av flyt i informantens arbeid med algebraoppgaver. Det som skal undersøkes er dermed knyttet til informantens løsningsprosess. Oppgavebaserte intervjuer er en godt egnet metode for å undersøke nettopp dette (se 3.3). Valget av metode bidrar dermed til å styrke studiens validitet.

Maxwell (2013) presenterer et nøkkelbegrep for validitet i «*the validity threat: a way you might be wrong*» (Maxwell, 2013, s. 123). Dette forklarer han med at en studies validitet kan knyttes opp mot de strategier forskeren benytter seg av for å identifisere og fjerne truslene mot validiteten (Maxwell, 2013). Videre i dette underkapitlet trekkes det frem noen momenter som kan utgjøre en trussel mot denne studiens validitet. Jeg vil si noe om hvilke grep som er gjort for å minimere disse.

3.8.1 Utvalget er ikke representativt

Utvalget i denne studien er lite. Datamaterialet som kommer frem i intervjuene med de fire informantene lar seg ikke generalisere til å gjelde for flere elever. Funnene i analysen sier noe om de fire informantene, og kun dem. At utvalget ikke er representativt kan være en mulig trussel mot studiens validitet. Jeg vil likevel påstå at det ikke nødvendigvis er slik.

Et argument for at mangelen på generaliserbarhet ikke alltid er en svakhet finnes blant annet hos Goldin (2000). Han presiserer at det ikke nødvendigvis er noe mål å søke mot generaliserbarhet, men heller det han omtaler som *«replicability»* (Goldin, 2000, s. 526). I dette ligger et mål om å beskrive metoden og analysen i detalj, på en slik måte at det er mulig å følge med i hvert trinn. På den måten kan «samme» intervju utføres på nytt i en annen setting. Tilsvarende mål finner vi hos både Maxwell (2013) og Kvale og Brinkmann (2009), omtalt som henholdsvis *«rich data»* og *«tykke beskrivelser»*.

Kvale og Brinkmann (2009) diskuterer hvorvidt mangelen på generaliserbarhet i kvalitativ forskning er en svakhet eller ikke. At utvalget ikke er representativ er ikke nødvendigvis en svakhet. Mindre utvalg gir rom for mere dyptgående datamateriale, noe som kan være en styrke. I forhold til spørsmålet om generaliserbarhet skriver forfatterne at vi må *«imidlertid spørre, ikke om intervjuresultater kan generaliseres globalt, men om den kunnskapen som produseres i en spesifikk intervjusituasjon, kan overføres til andre relevante situasjoner.»* (Kvale & Brinkmann, 2009, s. 265). De trekker blant annet frem en alternativ tilnærming til generaliseringen; nemlig «analytisk generalisering». En analytisk generalisering omhandler hvorvidt funnene fra en studie kan si noe om hva som kan skje i en annen setting (Kvale & Brinkmann, 2009). Dette forutsetter «tykke beskrivelser» av metode og analyse, i tillegg til at materialet knyttes opp til etablert teori. I denne studien er det blitt vektlagt å skildre metoden, og valgene som er gjort underveis, inngående. Kravet om «tykke beskrivelser» er dermed tilfredsstilt. I tillegg er prosedyrene for analyse klart knyttet opp mot et teoretisk rammeverk. At utvalget ikke er representativt utgjør dermed ikke en avgjørende trussel mot dataenes gyldighet og studiens validitet.

Oppgavene som er satt sammen i oppgavesettet dekker ikke alle deler av kompetansemålene i tall og algebra for matematikk fellesfag. Blant annet er det ingen oppgaver som inneholder andregradsligninger eller funksjonsuttrykk (se Kunnskapsdepartementet, 2010). Dette var et bevisst valg, basert på ønsket om å undersøke hvorvidt informantenes begrepsforståelse knyttet til grunnleggende tallfakta og symbolkunnskap påvirket graden av flyt i arbeidet med oppgavene. Et relevant spørsmål som er viktig å stille i forhold til oppgaveutvalget er hvorvidt andre typer oppgaver ville gitt andre data. En kan ikke si med sikkerhet at informantenes svar på andre oppgavetyper ville gitt tilsvarende datamateriale. Det er likevel rimelig å anta at informantene ville møtt på tilsvarende utfordringer knyttet til begreper som likhetstegn, brøk og negative tall, selv i arbeid med andregradsligninger.

3.8.2 Rollen som intervjuer og forsker

En annen mulig trussel mot studiens validitet ligger i min rolle og utførelsen av den. Dalen (2004) beskriver forskerens **forforståelse** som settet av meninger og oppfatninger som forskeren på forhånd har til fenomenet som skal undersøkes. Maxwell (2013) omtaler dette som *«researcher bias»* (Maxwell, 2013, s. 124). En oppdagelse som ble gjort under prøveintervjuene var hvor vanskelig det kunne være å gå helt ut av lærerrollen, og fullt inn i forskerrollen. Det er i møte med elever i praksis og i arbeid som lærer at interessen for masteroppgavens tema ble vekket. For å minimere risikoen for at min forforståelse eller «bias» skulle gi en feilaktig tolkning av datamaterialet, er prosedyrene for analyse tett knyttet opp mot et teoretisk rammeverk.

Graden av uerfarenhet i forhold til intervjurollen kan også ha bidratt til en mulig trussel mot studiens validitet. Som intervjuer var jeg redd for å forurense datamaterialet, og opptrådte dermed kanskje mer forsiktig enn en mer erfaren intervjuer ville gjort. Hunting (1997) beskriver bruken av hvorfor-spørsmål i oppgavebaserte intervjuer. Han understreker at slike spørsmål kan gi innblikk i viktige sider ved elevens matematikkompetanse, men at bruken ikke bør overdrives (Hunting, 1997). For mange hvorfor-spørsmål kan føre til at informanten blir forstyrret i sin frie problemløsning, noe som kan føre til at det gis et skjevt bilde av informantens kompetanse. Med bakgrunn i dette var jeg forsiktig med å ikke spørre for mye, der det kunne stanse den frie problemløsningen. I gjennomgang av transkripsjonene i etterkant, kom det frem at det var et par steder der et hvorfor-spørsmål kunne ha bidratt til å belyse mer inngående hva som lå bak informantens begrunnelse, uten at et slikt spørsmål ble stilt, av overnevnte grunn. Det er dermed relevant å trekke frem at noe data kan ha gått tapt i intervjuet på grunn av frykten for å forurense dataene.

Et grep som ble tatt for å veie opp for den nevnte uerfarenheten var å knytte intervensjonen fra intervjuer i forhold til informantens oppgaveløsning opp mot de fire stadiene som beskrives hos Goldin (2000). Dette er beskrevet i 3.6.3. Å knytte intervensjonene opp mot disse stadiene kan ha bidratt til å styrke studiens validitet. Dette begrunnes med at informanten har fått mest mulig rom til å utføre den løsningsprosessen som ligger nærmest det han ville gjort også utenom intervjusituasjonen.

3.9 Forskningsetikk

Johannessen et al. (2010) skriver at «*etiske problemstillinger oppstår når forskningen direkte berører mennesker, spesielt i forbindelse med datainnsamlingen, enten den foregår gjennom deltakende observasjon, intervjuer eller eksperimenter*» (Johannessen et al., 2010, s. 89-90). Det er derfor nødvendig med noen rammer eller retningslinjer. Retningslinjer fra den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) kan sammenfattes i tre typer hensyn forskeren må ta.

Den første er informantenes rett til selvbestemmelse og autonomi. Dette dreier seg om at informanten skal få alderstilpasset informasjon (Den Nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora, 2006). I tillegg stilles det krav til informert samtykke. Informantene i denne studien er alle over 16 år. Det var derfor ikke nødvendig å hente inn samtykke fra foresatte. Informantene fikk utdelt orienterings- og samtykkebrev under rekrutteringen. Dette ligger som vedlegg 2 til masteroppgaven. Her ble rammene for masterprosjektet skissert. Det ble også lagt vekt på hva det ville innebære å være informant, og at deltagelse var helt frivillig. For å ivareta informantenes rett til innsyn i materialet blir informantene gitt hvert sitt eksemplar av masteroppgaven etter gitt sensur. På denne måten er det åpenhet rundt hva som er skrevet om dem.

Et annet forskningsetisk hensyn som må tas i kvalitativ forskning går under kravet om konfidensialitet. I NESH sine retningslinjer leser vi: «*De som gjøres til gjenstand for forskning har krav på at all informasjon de gir om personlige forhold blir behandlet konfidensielt.*» (Den Nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora, 2006, s. 18). I denne masteroppgaven er alle navn fiktive. Dette er gjort for å opprettholde kravet om anonymitet. Skolen er heller ikke presentert ved navn. På den måten skal det ikke være en belastning for informantene å ha deltatt i studien. Lydopptakene fra intervjuene er det bare intervjuer som har hatt tilgang til. De destrueres ved sensur av oppgaven.

Det tredje hensynet som omtales er forskerens ansvar for å unngå skade. Informanten som deltar i studien skal utsettes for minst mulig belastning (Johannessen et al., 2010). For å imøtekomme dette hensynet ble det lagt vekt på at informanten ikke skulle oppleve intervjusituasjonen som ubehagelig. Intervjuer gav støtte i form av nikk, smil og bekreftende svar som «mhm» og «ja», der det var behov for det. Selv om svaret var feil, ble det lagt vekt på at informanten skulle oppleve at alle svar var godtatt, og i den forstand «riktige». Dette var for å gi informanten opplevelse av å bli ivaretatt. Intervjuer var også bevisst kroppsspråk og ansiktsuttrykk, slik at informanten skulle oppleve at alle svar var godtatt. Dette knyttes opp til det Dalen (2004) understreker om viktigheten av at forskeren er seg bevisst verbale og non-verbale tilbakemeldinger. Situasjonen skulle ikke oppleves negativt.

Før intervjuet startet ble det gjentatt at det var mulig å trekke seg dersom det var ønske om det. Det ble også presisert at det var mulig å stanse opptaket og ta en pause underveis dersom det skulle være behov for det. Dette begrunnes i at informanten skulle oppleve situasjonen som trygg.

Etter at intervjuet var gjennomført var det rom for at informanten kunne komme med innspill til intervjuet og oppgavene, og det hele ble avrundet med en kort, hyggelig samtale.

4 Analyse og resultater

I analysen vil jeg ta for meg informantenes løsningsprosedyrer og løsningstilnærminger til oppgavene, i den rekkefølgen oppgavene ble gitt. Deretter kommer en oversikt over de ulike utfordringselementene og feiltypene som kunne identifiseres i informantenes svar og arbeid med oppgavene. I tillegg trekkes det frem noen eksempler som illustrerer informantenes grad av flyt.

4.1 Presentasjon av informantene

4.1.1 Marius

Marius arbeidet mindre selvstendig enn de andre informantene med oppgavene i settet. Han hadde behov for en god del støtte underveis, i form av nikk, smil og andre former for positiv tilbakemelding. I flere av oppgavene var det nødvendig med intervjuers intervensjon i form av hint og spørsmål fra de forskjellige stadiene til Goldin (2000). Gjennom hele intervjuet forklarte han tydelig hva han gjorde og hvorfor. De gangene han stod fast hadde han også en forklaring på det. Dette gjorde det enklere å følge tankegangen hans, og få et innblikk i hans løsningsprosess.

Marius understreket at algebra kunne være en av de mer morsomme formene for matematikk, men at han ikke opplevde det som særlig nyttig. Derfor interesserte han seg ikke for det.

4.1.2 Trine

Trine arbeidet selvstendig med mange av oppgavene. Hun hadde sjelden behov for støtte og hint før hun gikk i gang med løsningsprosessen. Underveis gav intervjuer støtte i form av smil og nikk etc., der Trine så opp fra arket. Ved noen anledninger, særlig i forhold til noen av brøkoppgavene, var det nødvendig med hint fra de første stadiene for å komme videre i arbeidet med oppgaven. I det store og hele var inntrykket av Trine at hun arbeidet greit alene med matematikken.

Trine uttrykte at hun ikke følte seg så god i algebra, særlig i forhold til brøk.

4.1.3 Ragnhild

Ragnhild virket noe nervøs i begynnelsen, noe som gjorde at hun hadde behov for mye støtte og oppmuntring i startfasen. Da hun klarte å slappe mer av, arbeidet hun godt og selvstendig med mange av oppgavene. Hun forklarte lett og tydelig hva hun gjorde, noe som gav grunnlag for et godt lydopptak.

Når det kom til oppgaver med elementer hun syntes var vanskelig stoppet hun litt opp, og sa at dette fikk hun ikke til. Hun trengte hint fra de første stadiene for å komme videre. Deretter arbeidet hun nokså selvstendig, og effektivt.

Ragnhild sa at hun aldri hadde vært særlig glad i matematikk, men at å pugge og drille inn det hun lærte gjorde det lettere. I forhold til algebra opplevde hun det gøy og givende når hun oppnådde mestringsfølelse i forhold til oppgavene.

4.1.4 Per

Per trengte mye støtte gjennom intervjuet. Mest for å få bekreftelse på at han kunne gjøre det han gjorde, og at det var riktig. Han spurte intervjuer flere ganger om hun kunne si om han gjorde riktig eller ikke. Dette gav inntrykk av at han ikke var særlig selvstendig i arbeidet med oppgavene. Allikevel var det ikke stort behov for mye intervensjon på stadie 3 og 4.

Han snakket mye, og fortalte godt om hva han gjorde og tenkte, og hvorfor. Det ga dermed grunnlag for å kunne si noe om hans begrunnelser i løsningsprosessen.

Per beskrev algebra som morsomt i forhold til andre elementer i matematikken. Han omtalte det som at han likte å tenke logisk.

4.2 Analyse av oppgave 1 - Aritmetikk

Denne oppgaven målte informantenes generelle tallkunnskap. Et solid aritmetisk fundament er et viktig utgangspunkt for å oppnå god algebraisk kompetanse. Grunnen til dette ligger blant annet i det Ketterlin-Geller og Chard (2011) og Jordan et al. (2013) presenterer, at elever med manglende tallkunnskaper møter flere utfordringer i arbeid med algebra. I informantenes løsningsprosess så intervjuer etter innlærte prosedyrer og forståelse for hvorfor disse kunne brukes. Deloppgavene måler ulike områder innenfor aritmetisk kompetanse. I dette kapittelet vil det bli presentert illustrerende funn fra hver av dem.

4.2.1 Analyse av oppgave 1 a) – Regnerekkefølge, parentes og hoderegning

I denne deloppgaven lå fokuset på kunnskap om parentes og regnerekkefølge, men også hoderegning og regneflyt.

a)

$$(9 + 3 - 6) \cdot 3 - 11$$

Figur 8: Oppgave 1 a) – Regnerekkefølge, parentes og hoderegning

Per og Ragnhild valgte å regne ut det som stod inne i parentesen først, og deretter multiplisere med 3. Ragnhild benyttet hoderegning, og fant svaret 7 effektivt. Per talte på fingrene, og begrunnet dette med at han trengte å sjekke at det stemte: «Ja, *jeg bruker ofte fingrene til å bare dobbeltsjekke fordi jeg er … jeg vet jeg gjør mye slurvefeil.».* Han benyttet seg av en regnestrategi som er mindre hensiktsmessig enn hoderegning. Det krever flere ressurser, og det tar lengre tid. Sett i lys av teorien som drøftes i 2.2.2 er det tydelig at dette påvirker graden av flyt i arbeidet hans.

Trine, derimot, valgte å multiplisere først 9, 3 og deretter -6 med 3, for så å regne dem sammen. Begge prosedyrene er riktige, og fører begge frem til rett svar. Forskjellen mellom dem ligger i det at Trines løsningsmetode kan beskrives som mindre hensiktsmessig enn de andres. Det gav henne større tall å regne med, og flere steg i løsningsprosessen. Forskjellen i valg av løsningsmetode kan forklares ved at Trine følger en innlært prosedyre, som hun har automatisert. Denne prosedyren er mer regelstyrt enn den Ragnhild og Per valgte. Per og Ragnhild gjenkjente 9 + 3-6 som 6, og regnet deretter videre med dette. Trine fulgte en innlært regel som hun kunne ha brukt dersom det var en ukjent inne i eller utenfor parentesen.

Marius hadde følgende løsningsmetode:

oppgave 1

a) $9+3-18-11=-17$

Løsningseksempel 1: Marius oppgave 1a) – Begrepsforståelse parentes.

Han multipliserte 3 med -6, og fikk -18. De andre tallene i parentesen lot han bare stå. Deretter regnet han sammen, og endte opp med -17. Dette kan tolkes som en manglende begrepsforståelse rundt parentesens funksjon. Han begynte arbeidet med oppgaven med å fortelle at «*man skal jo løse opp parentesen, og man skal alltid gange først når man har flere… ehh.. regner.. hva skal man si.. du har pluss og gange..*». Dette kan tyde på at han har tilegnet seg en aritmetisk prosedyre, men han har ikke forstått alt hva det innebærer. Han tok utregningene lett i hodet, noe som indikerer en automatisering. I henhold til hans forståelse av oppgaven og hans regneregler er det helt rett det han har kommet frem til.

Svaret hans ble produsert relativt raskt. Dette kan knyttes opp mot det Özsoy (2011) presiserer om at et svar som ikke er riktig, likevel kan oppfattes som riktig. Marius arbeidet sammenhengende og effektivt med oppgaven, og gav ikke inntrykk av at den var vanskelig. Det kan dermed godt stemme at han, basert på lettheten svaret ble produsert med, ikke så noen grunn for at det ikke skulle være riktig.

4.2.2 Analyse av oppgave 1b) – Brøk, regnerekkefølge og hoderegning

b)

$$\frac{(3+5)}{4}$$

Figur 9: Oppgave 1 b) – Brøk, regnerekkefølge og hoderegning

Deloppgave 1b) målte brøkkunnskap i tillegg til kunnskap om parenteser og regnerekkefølge.

Alle informantene valgte å løse parentesen først, og addere 3 +5, noe som indikerer en god begrepsforståelse av parentesen. I tillegg viser det at de har kontroll på regnerekkefølgen i denne oppgaven. Flere av dem stoppet likevel opp, når de kom til brøken. Trine stanset helt opp og sa: «*Jeg er ikke så god med sånn brøk*». Hun trengte intervensjon på stadie 2 for å komme videre i oppgaveløsningen.

Hvem	**Handling/utsagn**	**Tolkning/kategori**
Intervjuer:	Kan du se noe du.. som ligner på noe annet du har sett før for eksempel?	*Intervensjon Stadie 2*
Trine:	Må vel kanskje ta vekk parentesen, så det blir 8 fjerdedeler, og det er 1 nei det er 2. ja. *nervøs latter*	*-løser parentesen -gjenkjenner brøk som divisjon av heltall*

Transkripsjon 1: Trine oppgave 1 b) - Løse opp parentes

Trine virket litt nervøs, og det var tydelig at brøken gjorde henne usikker. Hun løste etter hvert oppgaven ved å gjenkjenne brøken som divisjon av heltall.

Per stoppet opp og gav tydelig uttrykk for at han var i tvil om hvilken løsningsstrategi han skulle velge. Intervjuer valgte etter hvert å intervere, med et stadie 2 spørsmål, som gjorde at Per fikk samlet tankene mer konkret på trinn i oppgaveløsningen.

Hvem	**Handling/utsagn**	**Tolkning/kategori**
Intervjuer:	Hva tenker du du skal gjøre først?	*Intervensjon, Stadie 2*
Per:	Gange og dele først tenker jeg liksom, det er det jeg tenker når jeg ser den oppgaven...	*Regnerekkefølge*
Intervjuer:	mhm. *nikker*	*Støtte*
Per:	Men igjen så tenker jeg også å løse parentesen... ehhm... for da ville det ha vært mye lettere... Mer logisk for meg. ehh, fordi hvis jeg skulle dele først så hva skal jeg da dele? 3 delt på 4... det ... så jeg plusser 5 pluss 3 og så... Skal du bare ha ett tall liksom?	*Regnerekkefølge*
Intervjuer:	Hva mener du?	*Oppklaring*
Per:	Det..Jeg bare plusser og deler jeg	*Regnerekkefølge. Regneoperasjoner.*
Intervjuer:	mhm *smiler*	*Støtte*
Per:	Da har vi 3 pluss 5, *hvisker: 3+ 5 er lik 5, 6, 7 8ja* så 8. Skal jeg forminske den eller skal jeg skrive den som heltall eller?	*Teller på fingrene*

Transkripsjon 2: Per oppgave 1 b) - Regnerekkefølge

Intervjuer tolket det som han var usikker på sitt eget valg, og trengte dermed å sette ord på de ulike valgalternativene. Per hadde lav grad av flyt i løsningsprosessen. Årsaken til den lave graden av flyt kan knyttes opp til hans kunnskap om regnerekkefølge. Når brøken hadde 3+5 i telleren, ble Per usikker på om addisjon eller divisjon kommer først. Etter å ha bestemt seg for rekkefølgen, gikk han videre med oppgaveløsningen. Regnestrategien var, som i forrige oppgave, å telle på fingrene. Dette vitner om en manglende automatisering av grunnleggende tabellkunnskap, som her bidrar til den lave graden av flyt.

Marius valgte å løse parentesen først. For å finne løsningen: «*..hva må du gange med 4 for å få 8, det er 2. Så da tror jeg svaret er 2*». Her ser vi at han har en forståelse av multiplikasjon og divisjon som inverse operasjoner.

Ragnhild fikk 8/4, etter å ha løst parentesen. I motsetning til de andre, gjenkjente hun ikke dette som et annet tall. Etter å ha regnet ut parentesen sa hun: «*ehh jeg skjønner ikke helt. Jeg tror ikke oppgaven her ber om mer enn det, men jeg kan jo kanskje forkorte?*». Hun delte på 4 på begge sider av brøkstreken og fikk 2/1. Deretter satte hun to streker under svaret for å understreke at hun hadde løst oppgaven ferdig. Intervjuer var interessert i å sjekke om Ragnhild gjenkjente 2/1 som et heltall. Derfor ble det stilt et oppfølgingsspørsmål.

Hvem	**Handling/utsagn**	**Tolkning/kategori**
Intervjuer:	Kan du gjenkjenne det som noe annet?	*Fordypning/oppfølgingsspm (på stadie 3)*
Ragnhild:	ja. en hel og en ... endel. nei, nei! 2 hele... selvfølgelig *nervøs latter*. sånn *smiler*	*Brøk.*

Transkripsjon 3: Ragnhild oppgave 1 b) - Brøk

Svaret til Ragnhild kan tolkes på flere måter. Situasjonen kan ha gjort henne nervøs, og dermed bidratt til at hun ikke straks så sammenhengen. På den annen side kan forvirringen illustrere et aspekt ved hennes brøkkompetanse. For eksempel kan det at hun ikke gjenkjente 8/4 som 2 eller 2/1 som 2 skyldtes at hun ikke reflekterte over at det kunne skrives på en annen måte. Det kan og skyldes at hun hengte seg for mye opp i det at det var en brøk, og at dette gjorde henne nervøs. En annen forklaring kan ligge i at hun hadde automatisert noen regneregler/prosedyrer for arbeid med brøk, som hun tok i bruk ukritisk.

4.2.3 Analyse av oppgave 1c) – Brøk og regnerekkefølge

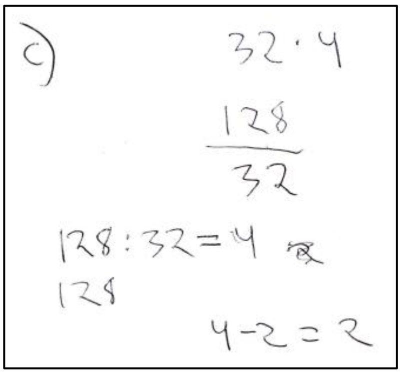
Denne deloppgaven målte brøkkunnskap og regnerekkefølge. I arbeidet med denne oppgaven valgte flere av informantene å regne med brøken, ved å benytte regneprosedyrer for brøk.

c)

$$\frac{32}{8}\cdot 4 - 2$$

Figur 10: Oppgave 1 c) – Brøk og regnerekkefølge.

Marius løste den ved å først multiplisere 32 med 4, for å få 128/ 32. Deretter regnet han ut hva dette ble, og satte det så inn i resten av oppgaven. Marius gir inntrykk av å arbeide på «autopilot». Løsningsprosessen gikk litt av seg selv, og Marius stoppet ikke opp for å vurdere hvorvidt det han gjør er hensiktsmessig eller ikke. Dette kan tyde på lav grad av selvregulering i oppgaveløsningen.



Løsningseksempel 2: Marius oppgave 1 c)

Han kom frem til svaret 2. Under løsningsprosessen uttrykket han tydelig at han var usikker på hva han gjorde:

Hvem	**Handling/utsagn**	**Tolkning/kategori**
Marius:	okey *smiler*. 32 *skriver mens han snakker* ganger 4. 4 ganger 2 er 8. 4 ganger 3 er 12. 128. også er det ehh 4 ganger 8 er ehmm 32. 32.ehhm. og så blir det da dele 128 på 32. det kan bli litt mere vrient. i og med at du sier at man ikke skal bruke kalkulator... så ... tenker jeg at jeg har gjort feil. av en eller annen grunn	*-Hoderegning* *-etterspør kalkulator*

Transkripsjon 4: Marius oppgave 1 c) - Hoderegning. Usikkerhet

I deloppgave a) kom Marius frem til galt svar, men var sikker på at det var riktig. Når svaret ikke blir produsert like enkelt og flytende, stopper han opp og betviler prosessen. Han har følelsen av at noe er galt. Dette blir tydelig i hans utsagn om kalkulatorbruk. Marius opplever at når svaret ikke kommer lett uten bruk av kalkulator må han ha gjort feil. Hans usikkerhet rundt divisjon av større tall tyder på at han ikke har automatisert denne kunnskapen. Han har likevel forstått at divisjon og multiplikasjon er inverse operasjoner. Dette er noe, som ifølge Robinson og LeFevre (2012) er kognitivt vanskelig for mange elever (se 2.4.2, «Operasjonssymboler»). Det at Marius knytter disse operasjonene så tett sammen er en styrke i møte med mange oppgavetyper. Det kan likevel bidra til at han møter vanskeligheter dersom ikke divisjonsoppgaven består av tall som lar seg dele på heltall.

Og videre:

Hvem	**Handling/utsagn**	**Tolkning/kategori**
Marius:	ja... jeg har ikke peiling på om jeg er helt på villspor eller ikke så ehh.. det jeg ville gjort nå da er ihvertfall å ta 128 delt på 32. jeg kan jo... nå husker jeg nesten ikke hvordan jeg tok ehh... deleoppgaver.. men jeg kan prøve *skriver*. skal vi se ehh.. 32 hvor mange ganger går det opp i 128?.. hmmm…*hvisker mens han ser på arket: ..64...hmm... * Ja. det går jo opp 4 ganger, så det er jo 4.. det er jo 4 - 2. da er svaret 2. tror jeg.. jeg vet ikke.	*Usikkerhet* *Divisjon som invers til multiplikasjon* *Regnestrategi*

Transkripsjon 5: Marius oppgave 1 c). - Usikkerhet, divisjon

Som vi ser valgte han en komplisert måte å løse oppgaven på, som innebar flere ledd i utregningen. Underveis kunne det virke som om han mistet oversikten, og han endte opp med galt svar. Han benyttet seg av innlærte prosedyrer, men intervjuer fikk ikke noe inntrykk av at han reflekterte over hvorvidt de valgte prosedyrene var hensiktsmessige eller ikke. Dette styrker indikasjonene om at Marius ikke er godt selvregulert i arbeidet med matematikk.

Trine gjenkjente 32/8 som divisjon av heltall, skrev det som 4, og regnet seg raskt frem til at svaret på oppgaven var 14. Hun hadde god flyt i arbeidet med denne oppgaven.

Både Ragnhild og Per gjenkjente også 32/8 som 4 etter hvert, men begge begynte rett på prosedyrer for regning med brøk. Ragnhild stod fast en stund, men det holdt med intervensjon på stadie 1 for å komme videre i oppgaveløsningen:

Hvem	**Handling/utsagn**	**Tolkning/kategori**
Intervjuer:	Hva er det første du tenker når du ser den oppgaven?	*Intervensjon Stadie 1*
Ragnhild:	Det første jeg tenker er at jeg må få bort brøken	*Regnerekkefølge*
Intervjuer:	Mhm	*Støtte*
Ragnhild:	... ehh... men... ehh ja det... ... at jeg må gange med minste felles multiplum på alle leddene også gjøre det videre, eller så tenker jeg, eller så gjør jeg det ganske vanskelig for meg selv, når jeg tenker det?.. ja ehmm... ja jeg tenker. nå tenker jeg sånn algebraregler jeg..	*Brøk. Regel*
(…)		
Ragnhild:	okey. jeg kan kanskje bare forkorte... også. eller jeg kan gjør om den til et vanlig tall, selvfølgelig	*Brøk*

Transkripsjon 6: Ragnhild oppgave 1 c) - Regnerekkefølge, brøk.

Å «gange med minste felles multiplum» var noe Ragnhild sa ofte. At hun stadig refererte til en regel kan tolkes som at Ragnhild er nokså regelstyrt i sitt arbeid med matematikken. Det kan også tyde på en lav begrepsforståelse knyttet til brøk. At hun arbeider så regelstyrt med matematikken kan bidra til at hun ikke med en gang ser de «enkle» løsningene. Dette kan frarøve henne en del tid i løsningsprosessen, og dermed bidra til lavere grad av flyt i arbeidet.

4.2.4 Analyse av oppgave 1d) - Regnerekkefølge

d)

$$121 - 5 \cdot 2 + 2(10 - 8)$$

Figur 11: Oppgave 1d) – Regnerekkefølge.

På denne deloppgaven valgte alle fire informantene å først multiplisere 2 inn i parentesen. Deretter regnet de sammen, først multiplikasjon, deretter subtraksjon og tilslutt addisjon. Dette vitnet om at alle informantene hadde tilegnet seg god prosedyrekunnskap om regnerekkefølge. Alle kom frem til av svaret var 115, og løsningsstrategiene var stort sett like. Med unntak av en ting. Marius valgte å sette 121-10 inn i en ny parentes og 20-16 inn i en annen. Deretter regnet han ut hver parentes, og adderte 11 + 4. Det som skilte hans prosess fra de andres var bruken av parentesene. Intervjuer tolket dette som en strategi Marius benyttet for å tydeliggjøre hvilke operasjoner som skulle utføres først. Det i seg selv behøver ikke bety at han har en lavere begrepsforståelse av parenteser. Likevel, sett i lys av Marius sin løsning i oppgave 1 a), er det interessant å trekke det frem.

4.2.5 Analyse av oppgave 1e) - Likeverdighet

e)

Hvilke av brøkene nedenfor er likeverdige?

$$\frac{2}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{25}, \frac{5}{25}, \frac{11}{23}, \frac{6}{8}, \frac{3}{6}, \frac{5}{9}$$

Figur 12: Oppgave 1 e) – Likeverdighet.

Denne oppgaven skulle måle forståelse for brøkbegrepet.

Ragnhild kom frem til at de likeverdige brøkene var 2/4, ½, 5/25 og 3/6. De andre svarte 2/4, ½ og 3/6. Begrunnelsene og løsningsmetodene var forskjellige. Ragnhild gikk gjennom alle brøkene, og skrev ned dem hun fant likeverdige. Intervjuer stilte spørsmål om hva hun ville si at det innebar at brøkene var likeverdige. På det svarte Ragnhild: *«altså, at de betyr betyr det samme liksom, har samme verdi?»*.

Trine svarte noe av det samme på til svarende spørsmål: *«De er like mye verdt, eller har samme verdi»*. Hun fant de brøkene som tilsvarte ½, og forklarte at 2/4, ½ og 3/6 var likeverdige, siden de alle var lik halvparten. Dette kan tyde på at Trine forstod brøken som et størrelsestall, men også som et forholdstall. Det som derimot var noe uklart, var Trines utsagn etter at hun hadde fullført oppgaven. Da pekte hun på de ulike brøkene og sa:

Hvem	**Handling/utsagn**	**Tolkning/kategori**
Trine:	ehhm. Da må man.. det er jo på en måte 2 siden det går to ganger i 4, og det er også 2, og det er 5, for 5 ganger 5 er 25. og	*Tallkunnskap. Lav begrepsforståelse brøk*

Transkripsjon 7: Trine oppgave 1 e) - Brøk, tallkunnskap.

Dette var noe som kom opp i forhold til brøk i noen av de senere oppgavene også. Sett sammen med hennes svar i denne oppgaven, kan det tyde på en manglende begrepsforståelse rundt brøk. Intervjueren burde her ha stilt noen spørsmål rundt dette utsagnet for å få klarhet i hva Trine mente. Dessverre kom ikke dette utsagnet tydelig frem før ved transkriberingen av intervjuet. Sett i lys av senere oppgaver kan dette bidra til å belyse et aspekt ved Trines brøkkompetanse.

Per startet hele oppgaven med først å forkorte alle brøkene. Han forklarte dette med at det ville spare han tid, og gjøre oppgaveløsningen lettere. Det som derimot skjedde var at han brukte mye tid på å forkorte, og hang seg noe opp i dette. Han fikk brøkene ½, ½, 2/25, 5/25, 11/23, 6/8, ½, 5/9, og stod dermed igjen med tre bøker som var lik ½. Med utgangspunkt i dette deduserte han at ½, 2/4 og 3/6 var likeverdige. Dette var matematisk riktig, men å benytte denne fremgangsmåten bidro til lavere flyt i Pers arbeid med oppgaven.

Både Per og Marius brukte et bilde for å illustrere likeverdighetsbegrepet. Per forklarte det som en kake noen av spist halvparten av, og Marius beskrev to halve pizzaer, hvor en er delt i fire og en i to, og at de er like store. En slik beskrivelse av brøk kan tyde på en forståelse av brøk som et størrelsestall.

4.3 Oppsummering om begrepsforståelse og flyt i aritmetikk for Trine, Ragnhild, Per og Marius

Ragnhild har lav begrepsforståelse av brøk, noe som blant annet kom frem i arbeidet med likeverdighet. De andre elementene, som regnerekkefølge, operasjonssymboler og parentes virker det som hun hadde kontroll på. Hun hadde automatisert en del ferdigheter og tabellkunnskap. Hoderegningen hennes var effektiv, og hun viste høy grad av flyt i arbeid med de oppgavene som ikke inneholdt brøk.

Ragnhild arbeidet nokså regelstyrt med flere av oppgavene. Dette førte til at hun av og til hadde en mer komplisert løsningsprosess enn nødvendig. Dette kom særlig frem i arbeidet med oppgave 1c). Årsaken til dette kan ligge i Ragnhilds manglende begrepsforståelse av sentrale elementer i denne oppgaven.

Trine gav inntrykk av å være nokså regelbundet i sitt arbeid med oppgavene. Førsteinntrykket var at hun hadde god flyt i arbeid med aritmetikkoppgavene. I møte med brøk i oppgavene, stanset denne flyten helt opp. Brøken gjorde henne usikker. Det ble tydelig under flere av brøkoppgavene at brøk var noe Trine opplevde vanskelig. Hennes utsagn etter oppgave 1e) tydet også på en lav begrepsforståelse av brøk. At Trine ikke har forstått hva brøk innebærer kan være en forklaring på hvorfor hun ønsket å ikke forholde seg til brøkoppgavene.

Marius viste en manglende begrepsforståelse av grunnleggende elementer slik som parentes og brøk. Dette gjør at han gjør feil i oppgaveløsingen. Gjennom flere av oppgavene gav

Marius inntrykk av å arbeide på «autopilot». Han virket ikke godt selvregulert i løsningsprosessen, og hans manglende begrepsforståelse fører til en lav grad av flyt i arbeidet.

Per benyttet stadig fingertelling for å utføre beregninger. Han har dårlig automatisert tabellkunnskap, og hans valg av regnestrategi bidrar til lav grad av regneflyt. Dette gjør at han bruker mye tid på oppgavene. Han virket også usikker på hvilken strategi/prosedyre han skulle benytte i oppgaveløsningen. Mye tid gikk med til å bestemme seg for hvordan han skulle gå frem for å løse oppgaven.

4.4 Analyse av oppgave 2 - Tekstoppgave

Oppgave 2

Ola, Siri og Maren skal til syden på ferie. De har med seg tilsammen 30 kg bagasje. Ola bærer 5 kg mer enn Maren, som bærer dobbelt så mye som Siri. Hvor mange kg bærer hver av dem?

Figur 13: Oppgave 2 – Tekstoppgave.

De to jentene valgte en algebraisk løsningsmetode for å løse tekstoppgaven. De satte opp en likning med Siris bagasje som den ukjente. Trine satte det opp som en likning slik det vises i løsningseksempel 3.

$$30 = x + x2 + x \cdot 2 + 5$$
$$30 = 5x + 5$$
$$30 - 5 = 5x$$
$$\frac{25}{5} = \frac{5x}{5}$$
$$5 = x$$

Løsningseksempel 3: Trine oppgave 2

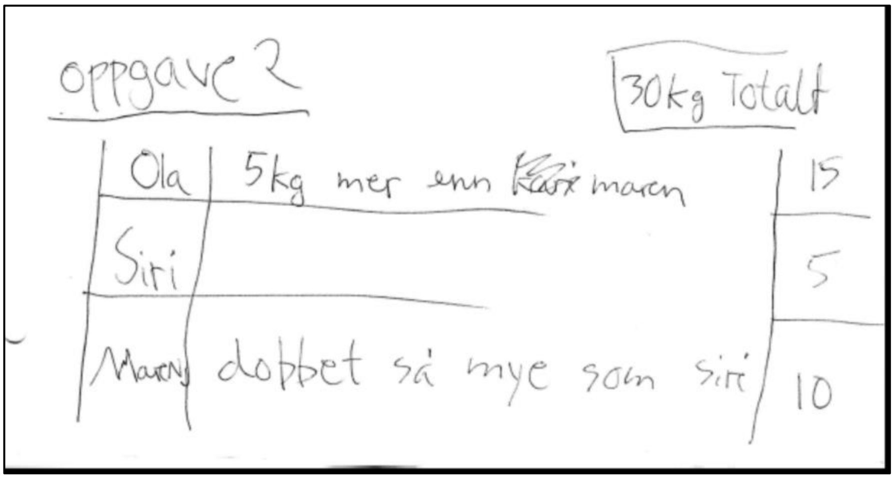
Deretter regnet hun seg fram til hva de to andre bar på, med utgangspunkt i den ligningen hun hadde satt opp. Ragnhild valgte samme løsningsstrategi. Begge jentene viste at de var i stand til å hente frem informasjon fra teksten, og deretter gjøre utregninger med den informasjonen de fant. Dette er kravene som stilles elever i arbeid med tekstoppgaver, slik som Ostad (1999) legger det frem. De valgte også en formell, algebraisk løsningstilnærming. Valget av en slik tilnærming kan være en indikasjon på at de har nådd et høyere kognitivt nivå i sin matematiske kompetanse. Dette begrunnes i Herscovics og Linchevski (1994) utsagn om et kognitivt gap mellom de elevene som kan arbeide med en ukjent variabel, og de som ikke kan det.

Både Marius og Per valgte en aritmetisk løsningstilnærming. Per benyttet seg av en «prøve- og feile»-strategi:

Hvem	Handling/utsagn	Tolkning/kategori
Per:	så Ola... og så bare prøve å feile... siden dette er en typisk del 2 oppgave på eksamen, eller ehh da kan man alltid bruke kalkulator, og da bare taster man inn det veldig fort. Pluss 5 *skriver* Maren dobbelt så mye... dobbelt av Siri... *skriver mens han snakker*... Og da bare tenker jeg sånn at... da setter man inn… så vet vi at... tilsammen er det 30 kg ikke sant?	*Uformell løsningstilnærming. Aritmetisk*
Intervjuer:	*nikker* mhm	*Støtte*
Per:	Og siden jeg vet at Maren bærer dobbelt så mye som Siri og Ola har 5 mer enn Maren... la oss si... da bare putter jeg inn. Okey. Siri... La oss si hun har 10 da. Da vet jeg at Maren må ha... Dette blir feil da, det blir for mye... da må Maren ha 20 og Ola har 5 mer enn Maren, og da har Ola 25. Da ser vi det fort, at det blir altfor mye. Da halverer si den bare. Sier at Siri har 5 kg. da har Maren 10 og Ola har 15. 15 pluss 15 er 30, og da fant vi svaret.	*Resonnering. Selvregulering*

Transkripsjon 8: Per oppgave 2

Pers valg av strategi vitner om at han er i stand til å hente frem informasjon fra teksten. Han har likevel ikke tilegnet seg den mer formelle måten å løse oppgaven på. Med større, vanskeligere tallsett, kunne hans strategi tatt mye tid. Pers løsningstilnærming, kombinert med hans manglende hoderegning, kan dermed bidra til lav grad av flyt i denne typen oppgaver.



Løsningseksempel 4: Marius oppgave 2

Marius valgte å sette opp en tabell først (se Løsningseksempel 4). Han begrunnet valget av løsningsmetode med at det hjelper å ha en oversikt. Deretter satte han inn tilfeldige tall som kunne passe. Han fant svaret med en gang. Men med mindre enkle tall å regne med, hadde han nok måttet prøve og feile en del ganger før han kom til rett svar. Dette sa han også selv: *«ja, jeg synes det ehh.. sånn jeg bruker jo bare den der..ehh.. prøver å sette inn litt tilfeldige tall, og så bare se hvordan.. også.. tenker jeg meg frem til det. så når det blir mye vanskeligere tall så er det så mye mer alternativer der ute da, hvis du skjønner?»*. Intervjuer spurte han etter han hadde løst oppgaven om han hadde lært å sette det opp som en ligning. Til det svarte han nei. At han ikke har lært en mer formell løsningsmetode kan tyde på at han ikke har tilegnet seg nødvendig kompetanse og forståelse av den variable.

4.5 Analyse av oppgave 3 - Variabler

I denne oppgaven lå fokuset på informantenes forståelse av variabler.

Oppgave 3

Hvilket av følgende uttrykk er det samme som $2x - 3y + 7x + 5y$:

- $5x + 2y$
- $5x + 8y$
- $9x + 2y$
- $9x + 8y$

Figur 14: Oppgave 3 - Variabler

Trine løste oppgaven raskt. Hun forklarte at det hun gjorde var å «*legge sammen y-ene og x-ene*». Det tyder på at hun hadde tilegnet seg noen regler/prosedyrer for hvordan slike oppgaver skulle løses. I arbeid med denne oppgaven viste Trine høy grad av prosedyreflyt. Løsningsprosessen bar preg av å være riktig, nøyaktig og effektiv. For å undersøke nærmere hvordan Trine forstod variable, stilte intervjuer henne spørsmål om hvorfor hun valgte å legge dem sammen på denne måten. Til det svarte hun:

Hvem	**Handling/utsagn**	**Tolkning/kategori**
Trine:	ja. At man… du kan ikke trekke sammen x og y. Det kan ikke bli… for hvis det skal bli xy må du gange... tror jeg... eller, jeg vet ikke... jeg har alltid... svaret må ikke bli ett tall, det kan bli... fordi at… ehh... x og y går ikke an å plusse sammen. De ...hvis det skulle blitt xy i svaret måtte det stått ett... for eksempel… 6xy der, som du… ja	*Begrepsforståelse variabler*

Transkripsjon 9: Trine Oppgave 3 – Begrepsforståelse variabel

Trine har nokså god kontroll på prosedyrene, men hun mangler en forståelse for hvorfor disse kan benyttes. Begrepsforståelsen hennes rundt begrepet variabel virker ikke sterk. Hun gir inntrykk av å ikke ha forstått helt hva det innebærer. Kombinert med hennes svar om at «*jeg har på en måte bare lært det*», kan det indikere en lav begrepsforståelse av variabler.

Per samlet først x-leddene.

Hvem	Handling/utsagn	Tolkning/kategori
Per:	Det er sånn 2 x og så tar jeg bare pluss siden 2x er positiv siden minustegnet er 3y sin. og da er det 2x pluss 7 x og det er 9x.	*Prosedyrekunnskap Negative tall – minustegn*

Transkripsjon 10: Per Oppgave 3 – Minustegn, prosedyrekunnskap

Han knytter minustegnet til 3y, og vet dermed at han må legge noe til 2x, og ikke trekke fra. Dette kan tyde på at han har forstått at en av minustegnets funksjoner er å indikere at vi har med et negativt tall å gjøre. Han ser på minustegnet som noe som hører til 3y-leddet. Videre, da han hadde funnet at det ble 9x, gikk han videre til y-leddene:

Hvem	Handling/utsagn	Tolkning/kategori
Per:	ehhm... 3y eller minus 3y pluss 5y er da 2y, pluss 2y… ehmm.	*Prosedyrekunnskap Variabler*

Transkripsjon 11: Per Oppgave 3 - Prosedyrekunnskap

Per viste god prosedyrekunnskap i arbeid med denne oppgavetypen. Det samme gjorde Ragnhild. Hun arbeidet rask, og møtte ingen vanskeligheter med oppgaven. Hun hadde med andre ord høy grad av flyt i løsningsprosessen.

Marius gav uttrykk for at han syntes oppgaven virket vanskelig:

Hvem	Handling/utsagn	Tolkning/kategori
Marius:	hmm.. ja… *sukker*. *klikker med pennen*. *dunker pennen på bordet*. Her er rett og slett… ehh… rett og slett ingen anelse.. .ehh..	*Usikkerhet*
Intervjuer:	Hva mener du?	*Oppklaring*
Marius:	nei, jeg er ikke noe.. jeg skjønner oppgaven, men jeg kan det rett og slett ikke, så hvis jeg.. jeg kan jo bare prøve å tenke så realistisk som mulig..	*Resonnering*

Transkripsjon 13: Marius oppgave 3 – Usikkerhet.

Etter å ha sett en del på oppgaven, og tenkt litt frem og tilbake, kom han frem til en løsning.

Hvem	Handling/utsagn	Tolkning/kategori
Marius:	jeg tenker jo.. da blir det jo egentlig..bare.. hvis jeg tenker 7 x + 2 x er 9x og -3y ja da blir det 2y, så da blir det 9x +2y da	*Prosedyrekunnskap variabler*

Transkripsjon 12: Marius oppgave 3 – Prosedyrekunnskap.

Han la sammen x-leddene og y-leddene for seg, og fulgte dermed samme prosedyre som de andre tre. Intervjuer stilte et oppfølgingsspørsmål til Marius, for å se hva han hadde tenkt rundt oppgaven. Forklaringen han gav på hvorfor han kunne trekke dem sammen bar preg av at han hadde tilegnet seg en regel: «*Det er fordi det er samme symbol*». Marius fikk samme svar, og benyttet til slutt tilsvarende tilnærming som de andre. Hovedforskjellen mellom løsningsprosessene lå i at Marius hadde en del lavere grad av flyt enn de andre. Dette kan skyldes hans mangel på formelle ferdigheter, men også en manglende begrepsforståelse av variabler. Et annet perspektiv som også kan gjøre seg gjeldende er en mangel på symbolkunnskap. Det som er klart er at Marius møter utfordringer i denne oppgaven som påvirker hans grad av flyt i arbeidet.

4.6 Analyse av oppgave 4 - Førstegradslikninger

I denne oppgaven var det interessant å se etter om informanten benyttet seg av formelle eller uformelle strategier for å løse ligningene. Det var også interessant å undersøke om det var elementer som påvirket prosedyreflyten. I tillegg lå fokuset på begrepsforståelsen rundt utfordringselementer, slik som blant annet brøk.

4.6.1 Analyse av oppgave 4 a) - Likhetstegnet

a)

$2x + 3 = 9$

Figur 15: Oppgave 4 a) - Likhetstegn

Den eneste av informantene som reflekterte over likhetstegnets funksjon var Per. Han løste ligningen ved å flytte over, slik at x-leddet stod alene på venstre side. Han forklarte hvorfor han kunne løse ligningen på denne måten: *«Fordi det er… Hvis man gjør det samme på hver side av erlikhetstegn… og der sånn er det jo pluss 3, og … men hvis jeg tar minus 3 på den andre siden av likhetstegnet så tar jeg bort like mye som det var pluss på den andre siden.»* Utsagnet til Per tyder på at han har forstått likhetstegnets funksjon i likningen. Han ser ikke kun på likhetstegnet som et tegn på at «nå kommer det et svar». Han har med andre ord oppnådd en god begrepsforståelse rundt likhetstegnets funksjon i algebra. Denne kunnskapen er en vesentlig del av algebraisk kompetanse (se 2.4.2), og kan bidra til å gjøre Per til en mer fleksibel ligningsløser.

Per hadde god prosedyreflyt i løsningsprosessen, helt frem til han skulle regne sammen tallene på høyre side. Der stoppet flyten, Per begynte å telle seg frem på fingrene:

Hvem	Handling/utsagn	Tolkning/kategori
Per:	x er lik 9, 8, 7, 6. Også deler jeg på 2, for å få x alene. Da er det x=3	Telle på fingrene. Ligningsløsningsprosedyre

Transkripsjon 14: Per oppgave 4 a) - Regnestrategi

Per får riktig svar og løser likningen ved å følge riktig prosedyre. Men på grunn av manglende automatisering av grunnleggende regneferdigheter, stopper han opp ved enkle regnestykker. Det hadde vært en mer hensiktsmessig regnestrategi å ta dette i hodet. Per viste gjennom flere av de andre oppgavene også, at han har nokså god kontroll på de ulike prosedyrene. Men han mangler en godt utviklet regneflyt. Dette bidrar til at løsningsprosessen hans til tider blir uhensiktsmessig og uoversiktlig. Han bruker mer tid og energi på oppgavene enn nødvendig.

Trine og Ragnhild løste begge deloppgaven raskt. De hadde begge god prosedyreflyt. Stilt spørsmål om hvorfor de kan flytte ting på begge sider av likhetstegnet, svarer begge noe om at *«jeg har lært det»*, og de reflekterer ikke noe mer rundt dette med likhetstegnets funksjon. De benyttet konsekvent strategien «flytt og bytt» ved likningsløsningene (se 2.4.4). Denne bar preg av å være godt automatisert. Det kan likevel virke som om begge jentene mangler en dypere begrepsforståelse bak prosedyrene. Det kan virke som de mangler en dypere begrepsforståelse av likhetstegnet.

Marius sa spontant at likninger ikke var hans sterke side. Likevel hadde han innlærte prosedyrer for å løse likninger med en ukjent. Han hadde forstått at fortegnet skulle «byttes» når den flytta over. Marius omtalte sin strategi som *«flytte- bytte-regelen»*. Dette i likhet med de andre informantene. Da intervjuer spurte hvorfor han kunne flytte leddene over slik, svarte han: *«Jeg vet ikke hvorfor, men det er bare sånn jeg har lært det»*.

Hverken Marius, Ragnhild eller Trine så ut til å reflektere noe særlig rundt hvorfor prosedyrene de valgte kunne benyttes. Dette kan tyde på at de manglet en dypere forståelse bak de innlærte prosedyrene. Dersom dette er tilfelle stemmer det godt overens med Naalsunds funn i 2012. Hun fant at informantene i hovedsak benyttet prosedyrene for likningsløsning uten å vise noen dypere forståelse for likhetstegnet (Naalsund, 2012). Hennes informanter var noen år yngre enn disse fire. Det er derfor interessant å se at noen av de samme trekkene kan sees hos dem. En manglende begrepsforståelse rundt likhetstegnet gjør eleven til en mindre fleksibel ligningsløser. Dette kom også frem i noen av de andre deloppgavene.

4.6.2 Analyse av oppgave 4 b) – Brøkledd i ligningen

b)

$\frac{1}{2}x = x - 4$

Figur 16: Oppgave 4 b) – Brøk i ligningen

I denne oppgaven møtte informantene en likning med flere utfordringselementer. Det var både en ukjent på begge sider av likhetstegnet, og en brøk i ligningen.

Trine valgte å «*gjøre om brøken til et heltall*», som hun uttrykte det, og fikk løsningen som kan sees i løsningseksempel 5. Å skrive om ½ til 2 vitner om en lav begrepsforståelse av brøk. Den ligningen hun laget da hun «skrev om til heltall» er ikke er lik den opprinnelige, og dermed får hun heller ikke riktig svar. Fra 2. linje følger hun korrekt ligningsløsningsprosedyre for ligninger med en ukjent. Trines løsning indikerer at hun har god kontroll på «flytt og bytt»-prosedyren for likninger med heltall, og at det er brøken i oppgaven som skaper vanskeligheter. Hennes manglende begrepsforståelse av brøk hindrer nøyaktigheten i arbeidet, noe som igjen påvirker flyten i Trines arbeid med oppgaven. Når flyt består av effektivitet, nøyaktighet og fleksibilitet, er det ikke mulig å si Trine har god flyt i arbeidet med denne oppgaven, selv om hun arbeidet raskt og effektivt.

b) $\frac{1}{2}x = x - 4$

$2x = x - 4$

$2x - x = -4$

$x = \underline{\underline{-4}}$

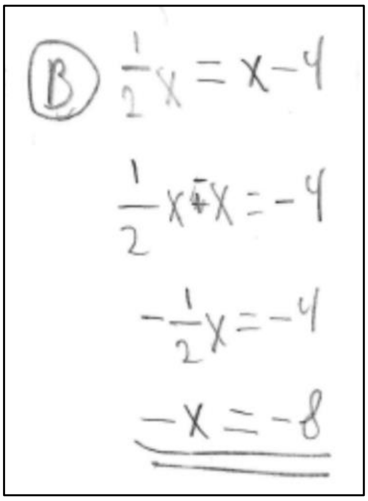
Løsningseksempel 5: Trine oppgave 4 b)

Per valgte å skrive om -1/2 x til -0,5x, og regne videre med desimaltall. Deretter ombestemte han seg, og gikk over til brøk igjen. Han brukte en del tid for å løse oppgaven, og mye av tiden gikk med til å bestemme valg av løsningsmetode. Intervjuer spurte han hvorfor han foretrakk å gjøre det om til desimaltall. Til det svarte Per:

Hvem	Handling/utsagn	Tolkning/kategori
Per:	Hvordan skal jeg si det? ehh.. hmm... Fordi når det står 1/2 x så er det liksom de to tallene, og jeg blir litt usikker på hvem av dem jeg skal plusse og minuse med og gange med. og hvor skal x-en gå?... Det bare blir et ekstra ledd som jeg begynner å lure på, selv om jeg egentlig vet at jeg innerst inne kan det.	*Variabel* *Brøk* *Regnerekkefølge*

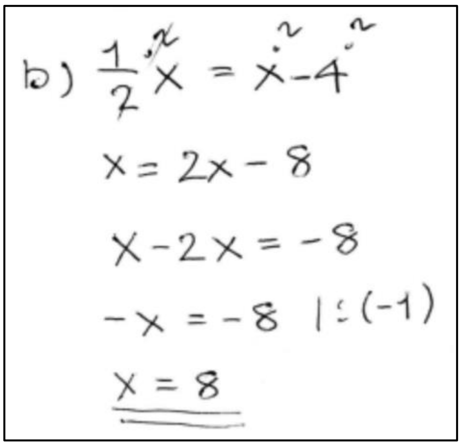
Transkripsjon 15: Per oppgave 4 b) - Brøk i ligningen

Etter å ha bestemt seg for å bruke brøken slik den stod, fikk han løsningen som vises i løsningseksempel 6. Som vi ser, fulgte han prosedyrene for løsning av likninger med ukjent på begge sider av likhetstegnet på en effektiv og hensiktsmessig måte. Dette tyder på god prosedyreflyt. I andre linje har Per endret operasjonssymbolet. Han skrev først +, men rettet raskt opp i det: *«Det jeg kan gjøre er å ta 1/2 x pluss x = ... nei minus x mener jeg...»*. At han retter opp dette raskt vitner om selvregulering i løsningsprosessen. At Per er selvregulert er en styrke i forhold til graden av flyt i arbeidet.



Løsningseksempel 6: Per oppgave 4 b)

Ragnhild valgte å multiplisere alle leddene i likningen med 2, og regnet deretter videre med bare heltall. Hun begrunnet dette med at hun aller helst ville ha bort brøken. Her hadde Ragnhild samme ønske som Trine: nemlig å helst unngå å måtte forholde seg til brøken i ligningen. I motsetning til Trine, valgte Ragnhild en prosedyre for å fjerne brøken som var matematisk riktig. Dette kan tyde på at Ragnhild har en bedre forståelse av brøk. Det er i hvert fall klart at Ragnhild hadde tilegnet seg en mer hensiktsmessig måte å forholde seg til brøk på. Etter å ha multiplisert vekk brøken fortsatte hun med løsningen vi ser i løsningseksempel 7. Ragnhild hadde høy grad av flyt i arbeidet med denne oppgaven. Den hadde riktignok vært høyere dersom hun hadde kunnet løse ligningen selv med brøkleddet. Da ville løsningen vært mer effektiv, og hennes løsningsprosess ville båret preg av fleksibilitet, siden hun hadde flere mulige løsningsstrategier tilgjengelig (se 2.2.2).



Løsningseksempel 7: Ragnhild oppgave 4 b)

Etter å ha strevet en stund med oppgaven, valgte Marius å ikke gjøre den. Det var tydelig at kombinasjonen av brøk og ukjent på begge sider bidro til å skape forvirring hos Marius.

Hvem	Handling/utsagn	Tolkning/kategori
Marius:	ja.. neste oppgave. *sukker* Det blir litt ... ja.. de neste oppgavene ehh. sånn brøkoppgaver.. jeg har kunnet det litt sånn... og når det er to x-er så blir jeg helt satt ut, da skjønner jeg ikke noe så da... ehhh..	*Brøk.* *Usikkerhet på grunn av at den ukjente er på begge sider av likhetstegnet*
Marius:	skal vi se… *skriver* 1/2... så blir det å flytte -4 på den andre siden.. ehh... så da blir det... ehh... pluss 4 = x... nei... vent da. det er jo kanskje.. nei.. nå blir jeg usikker på om det er en del av nei det kan ikke være en del av brøken.	*Flytt og bytt – prosedyre.* *Brøk*

Transkripsjon 16: Marius oppgave 4 b) – Brøk, flytt og bytt med ukjent på begge sider

Intervjuer presiserte før intervjuet at det ikke skulle oppleves som en ubehagelig eksamenssituasjon. Derfor fikk Marius velge bort oppgaven, da det ble tydelig at han strevde med den. Selv om han ikke gav en løsning er det mulig å trekke noe data utfra dette. Marius ble usikker, og mistet flyten i arbeidet, når det var både brøk og ukjente på hver side. Brøk er en stor utfordring for mange elever, som redegjort for i 2.4.1. I tillegg er algebraiske ligninger mer kompliserte enn aritmetiske og krever mer formell kunnskap. (Dette er redegjort for i 2.4.4). Kombinasjonen av disse elementene ble en stor utfordring for informanten. Naalsund (2012) opplevde at flere av informantene fant denne oppgaven vanskelig. Det viste seg å være særlig vanskelig at den ukjente var på begge sider av likhetstegnet. Marius sine utfordringer med denne oppgaven kan knyttes til det som presenteres i TIMSS-rapporten om mangelen på formelle kunnskaper i algebra (se 2.4.4). Det kan virke som om hans manglende formelle kunnskaper skaper flere utfordringer for han i møte med vanskeligere ligninger.

4.6.3 Analyse av oppgave 4 c) – «Flytt og bytt», ukjent på begge sider av likhetstegnet

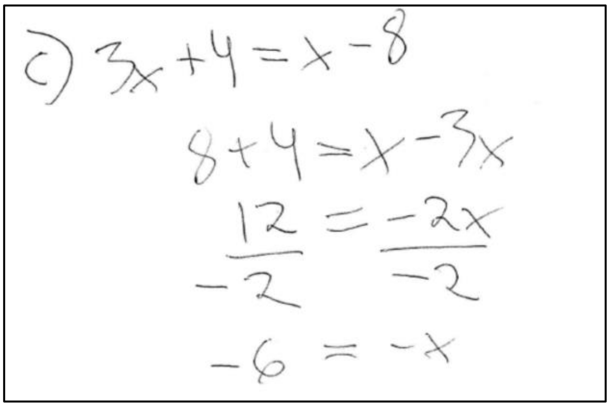
c)

$$3x + 4 = x - 8$$

Figur 17: Oppgave 4 c) – Likhetstegn, ukjent på begge sider

Denne oppgaven valgte alle fire informantene å løse ved å benytte «flytt og bytt»- prosedyren (se 2.4.4). Ragnhild syntes det var noe vanskeligere å regne med negative tall. På spørsmål om hvorfor hun trodde det var slik, svarte hun *«Jeg vet ikke. Det er liksom… på andre siden av 0. Og så er det sånn… ja jeg skjønner ikke om jeg skal legge til eller... om jeg skal legge...ta fra…trekke fra».* Marius uttrykte også at han syntes negative tall var litt komplisert. Han var usikker på om det var mulig å sitte igjen med en negativ x. Begge disse utsagnene kan knyttes opp mot det Gullick et al. (2012)

skriver om at det ikke er like lett å forstå hva et negativt tall betyr. Det er ikke en «målbar» størrelse, på samme måte som positive heltall (se 2.4.1). Å sitte igjen med en negativ x var for Marius vanskelig å se for seg. Ragnhilds utsagn illustrerer at hun har vanskelig for å visualisere et negativt tall. Negative størrelser er kognitivt vanskelige å forstå, og kan dermed bidra til utfordringer i arbeidet med algebra. Både Marius og Ragnhilds utsagn indikerer en lav begrepsforståelse av negative tall.



Løsningseksempel 8: Marius oppgave 4 c)

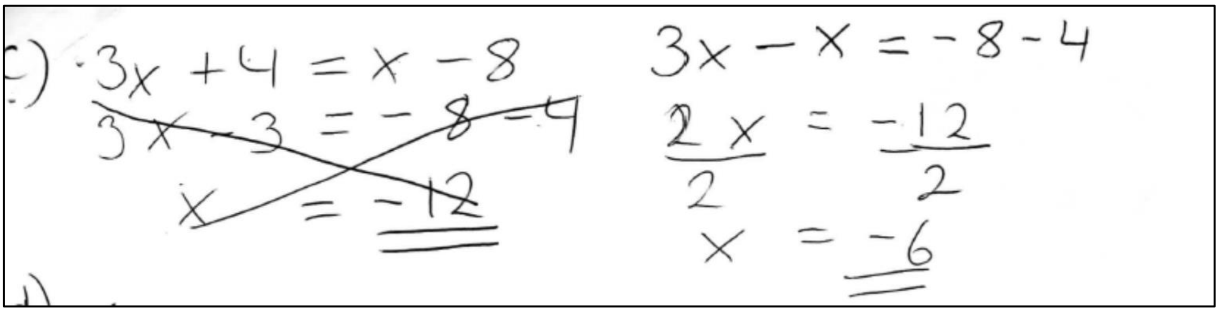
Marius sin løsning ser vi i løsningseksempel 8. At han står igjen med – x og ikke en positiv x kan være slurvefeil. Men det kan også tyde på at han har vanskeligheter med negative størrelser. I tillegg kan det indikere en lav symbolforståelse hos Marius. Dette kom også til uttrykk i hans arbeid med oppgave 3.

Trine begynte først å flytte over til ønsket side av likhetstegnet. I prosessen ble x-en omgjort til en 3-er. Dette ble oppfattet av intervjuer som slurvefeil, men det ble ikke kommentert, for å se om Trine regulerte sin egen løsning. Trine fikk rom til å oppdage det selv, noe hun også gjorde:

Hvem	Handling/utsagn	Tolkning/kategori
Trine:	... så da flyttet jeg... oi... her har jeg skrevet feil. Da blir det... nei... jeg bare tar vekk den. ehhm. Skal flytte over den til den siden. Da bytter den fortegn så det blir -x og ikke -3.	*selvregulering*

Transkripsjon 17: Trine oppgave 4 c) - Selvregulering

Deretter fortsatte hun å løse likningen under:



Løsningseksempel 9: Trine oppgave 4 c)

I arbeid med oppgaven, etter at hun hadde oppdaget feilen, hadde Trine god prosedyreflyt. At Trine oppdaget feilen hun hadde gjort, og startet på nytt, indikerer en grad av selvregulering i arbeidet med oppgaven. Dette er viktig for hennes grad av flyt.

Per hadde ingen vanskeligheter med denne oppgaven. Han hadde høy grad av flyt i løsningsprosessen.

4.6.4 Analyse av oppgave 4 d) – Ligninger med store tall

I denne oppgaven ble informantenes evne til å håndtere store tall uten tekniske hjelpemidler, i tillegg til enkel ligningsløsning, vektlagt.

d)

$$6x + 370 = 1500$$

Figur 18: Oppgave 4 d) – Ligning med store tall

Trine og Ragnhild hadde begge god prosedyreflyt i arbeid med oppgaven. De valgte begge å skrive på arket når de skulle regne ut 1130 :6. Begge virket å ha god kontroll på prosedyrer for divisjon av et stort tall. Det virket heller ikke som at tilstedeværelsen av store tall i ligningen skapte noen særlige utfordringer i løsningsprosessen. De var begge likevel avhengig av å skrive på arket for å løse utregningene. Ingen av dem forsøkte å ta det i hodet.

Per ble også i denne oppgaven hindret av mangelen på automatisert tabellkunnskap.

Hvem	**Handling/utsagn**	**Tolkning/kategori**
Per:	Tror jeg gjør riktig nå... *skriver* Ja. *skriver**sukker**hvisker: 1 0 0....* Vent da, vi...*Hvisker: 6, 18, 24, 32....38... nei.. hmm. 6, 12, 18..., 4, 30, 36, 42, 48, 5... 8 ganger 6 er 48... {} * Faen, jeg tror jeg har gjort noe feil	*Regnestrategi: Teller på fingrene*

Transkripsjon 18: Per oppgave 4 d) - Regnestrategi

Selve ligningsløsningsprosedyren hadde han ikke noen problemer med. Men han stoppet opp i divisjon av 1130 på 6. Hovedsakelig på grunn av at han måtte telle seg frem på fingrene, og «datt» ut av rekka med jevne mellomrom. Som Tolar et al. (2009) nevner (se 2.1) er arbeidsminnekapasitet en viktig del av algebraisk kompetanse. Regneflyt, og derunder automatiserte ferdigheter, som blant annet Holm (2002) påpeker, bidrar til å frigjøre plass i arbeidsminnet. Pers tellestrategi tar opp mye plass i hans arbeidsminne. Dette gjør at han ikke alltid klarer å ha oversikt over utregningene. Det er for mye informasjon som minnet skal forholde seg til på en gang. Pers løsningsprosess i denne oppgaven kan også knyttes til

Kilpatrick et al. (2001) utsagn om at elever som bruker mye unødig tid på enkle utregninger mister oversikten, og kan dermed miste viktig informasjon som er gitt i oppgaven (se 2.2.3).

Marius måtte ha flere hint og spørsmål fra både stadie 1, 2, 3 og 4 for å komme videre.

Hvem	**Handling/utsagn**	**Tolkning/kategori**
Intervjuer:	husker du hva du gjorde i oppgave a)?	*Stadie 3*
Marius:	at jeg flyttet 3ern over…	*Flytt og bytt*
Intervjuer:	mhm. kan du se noen likheter mellom de to?	*Stadie 3*
Marius:	det er jo samme oppgave, bare større tall.	*Gjenkjennelse*
Intervjuer:	hvis du prøver det?	*Stadie 4*
Marius:	ja. ehh. her var da 1500 – 370... ehh. 6 x.. okey. da er det jo regning da. da blir det jo 200 og.. 1230	*Hoderegning* *Flytt-og-bytt*

Transkripsjon 19: Marius oppgave 4 d) – Flytt og bytt

Etter å ha sett likheten mellom d) og a) klarte Marius fint å løse ligningen. Dette kan tyde på at han har tilegnet seg prosedyrer for ligningsløsning, men ikke mange nok til at han blir en fleksibel ligningsløser. I møte med ukjente oppgavetyper blir han hindret av sin strategirigiditet. (se Ostad (1999) i 2.4.3).

4.6.5 Analyse av oppgave 4 e) – Ligning med parentes

e)

$$4(x+5)=8$$

Figur 19: Oppgave 4 e) – Ligning med parentes

Trine startet med å gange inn i parentesen: «*Her må jeg gange inn det som står ved parentesen, inn i parentesen. Og da... blir det 4... x. Pluss 20.. eller så kan man skrive x^4 det... eller?... ehh. nei, det er sånn man ganger x-ene sammen*”. At hun vurderte å la 4(x+5) bli lik x^4 + 20 kan vitne om en dårlig begrepsforståelse av parentes. Hun hentet seg selv inn, og endte opp med å skrive 4x+20, som er riktig. Evnen til å regulere sitt eget svar underveis vitner om metakognisjon i oppgaveløsningen. Det første forslaget kan ha vært en «glipp», som hun raskt rettet opp. Det i seg selv behøver ikke å bety at hun har lav begrepsforståelse av den ukjente. Sett i lys av hennes svar på oppgave 3, er det likevel elementer som taler for at dette skyldes manglende forståelse av variabler.

Marius hadde allerede ytret flere ganger at han syntes ligninger var vanskelig. I møte med denne oppgaven refererte han til noe han hadde lært:

Hvem	Handling/utsagn	Tolkning/kategori
Marius:	siste. å...okey.. *smatter* det jeg ville gjort her er at jeg ehh, mente jeg hørte noe gamle mattelæren min sa noe sånn om at når det er ligninger så, parentes skal du alltid løse opp det før du tar ligningene så det... da blir det 4 ganger x er4x og 4 ganger 5 er 20?	*Parentes, regnerekkefølge, flytte-bytt*
Marius:	nå ble jeg veldig usikker her, for nå er ho den minus og den positiv ehh… så jeg vet ikke om x rett og slett bare kan være et negativt tall eventuelt da…	*Begrepsforståelse variabel, negative tall*

Transkripsjon 20: Marius oppgave 4 e) – Parentes.

At Marius refererer til at han har hørt noe læreren sa, indikerer at Marius er regelstyrt i sitt arbeid med matematikken. Etter å ha løst parentesen, brukte han flytte-bytt-strategien. Han hadde god flyt i arbeidet til han fikk 4x=-12. Her stanset han opp, da han så at x-en var negativ. Hans begrepsforståelse av negative størrelser kan tolkes som lav.

4.6.6 Analyse av oppgave 4 f) – Den ukjente under brøkstreken

f)

$$\frac{20}{x} = 40$$

Figur 20: Oppgave 4 f) – Ukjent under brøkstreken

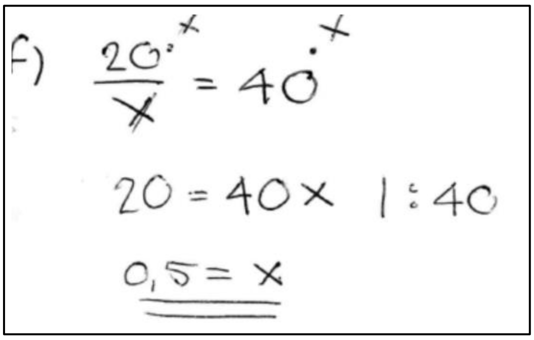
Per løste først ligningen i denne oppgaven ved å benytte en uformell løsningsmetode. *«Hvis jeg skal tenke uten å regne noe… det er at 20/0,5 er det samme som 40.»* Men han stopper opp der, for han vil finne en verdi for x ved å løse ligningen, men han finner ikke ut hvordan han skal gripe det fatt. Per forklarte at han ville løse ligningen med hensyn på x, for å bevise at svaret han kom frem til var riktig. At han finner en riktig løsning kun ved å se på ligningen, og resonnere seg frem, vitner om en god tallforståelse. Den formelle løsningsmetoden har han noen utfordringer med.

Hvem	Handling/utsagn	Tolkning/kategori
Intervjuer:	Er det noen ting som du har lært om løsning av ligninger som du kunne gjort for å få xen til å stå alene her?	*Intervensjon, Stadie 3*
Per:	mm… ja, jeg kan alle reglene, men jeg vet ikke hvordan jeg skal benytte dem… når det blir sånn.	*Ufleksibel. Regelstyrt*

Transkripsjon 21: Per oppgave 4 f)

Vi ser at Per har automatisert en del prosedyrer for ligningsløsning, men han står fast i møte ukjente typer av førstegradsligninger. Naalsund (2012) så også dette ved sine informanter. Mange hadde vansker med å løse ligningene når x stod under brøkstreken. Prosedyren flytt og bytt var ikke like lett å overføre til slike situasjoner. Dette kan skyldes, som hun påpeker, en manglende begrepsforståelse (Naalsund, 2012). På spørsmål om han ofte klarer å gjette seg frem til x-en uten å løse ligningen, svarer han spontant: «*mange ganger! Veldig mange ganger!*».

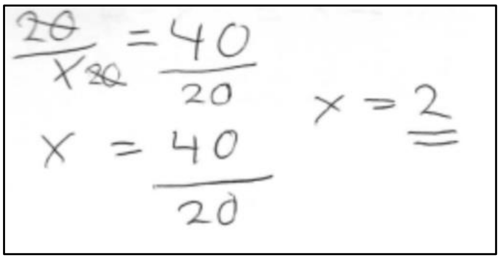
Ragnhild stopper litt opp ved denne oppgaven. Hun forteller at hun synes det er veldig vanskelig med brøk generelt, og særlig når den ukjente er under brøkstreken, slik som i denne oppgaven. Men hun kommer etter hvert frem løsningsmetoden vi ser i løsningseksempel 10.



Løsningseksempel 11: Ragnhild oppgave 4 f)

Hun valgte en formell løsningsprosedyre. Dette gjorde også Trine. At hun får 20/x *20 og skriver det som x, vitner om en utilstrekkelig brøkkompetanse.

Dette gjorde hun også i oppgave 4 b), der hun «skrev om brøk til heltall». At Trine gjør dette flere ganger indikerer en lav forståelse av brøkbegrepet. Dette gjør at Trine har en alvorlig misoppfatning som preger arbeidet hennes. Hun gir inntrykk av god flyt i arbeidet med oppgaven, og svaret kommer raskt. Hun stopper ikke opp underveis og vurderer hvorvidt svaret er rett eller ikke. Hun benytter en automatisert prosedyre, men reflekterer ikke over hvorvidt den er riktig eller ikke. Trine har dermed ikke høy grad av prosedyreflyt i denne oppgaven.



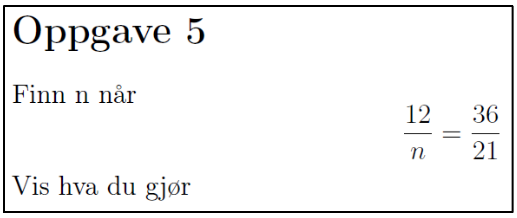
Løsningseksempel 10: Trine oppgave 4 f)

Marius hadde store vanskeligheter med denne oppgaven. Hans første utsagn, om at «*det er jo ikke noe å flytte og bytte eller…*», vitner om at han er en lite fleksibel ligningsløser. Når ligningen har en annen form en den «pleier», får han vansker med å løse den. Marius har automatisert «flytt og bytt» - prosedyren for førstegradsligninger med heltall. Som drøftet i 2.3 er automatisering av ferdigheter avgjørende i algebra, men det er ikke nok i seg selv. Marius mangler en dypere forståelse for hvorfor denne prosedyren kan benyttes (se også 4.6.1). Han kan dermed ikke overføre den til andre oppgavetyper, noe hans utsagn ovenfor illustrerer. Etter å ha sett litt mer på oppgaven sa han: «... *man kan jo bare tenke egentlig... motsatt vei*». Dette tyder på at han har forstått at divisjon og multiplikasjon er inverse operasjoner. I tillegg viser utsagnet at han har en forståelse av brøk som divisjon av heltall.

Hvem	Handling/utsagn	Tolkning/kategori
Marius:	det er jo nevner da på en måte, til brøken.. såå..det betyr jo.. men når det er satt opp sånn betyr det jo 2 delt på ettellerannet.. ehh... men hvis jeg skal ta det sånn som jeg pleier å gjøre hvis det er vanskelige delestykker og, at jeg bare tar det motsatt vei.. så er jo.. da må to bli riktig svar.. hvis du setter opp... 20 ganger 2 = 40. så det er det eneste alternativet jeg har.	*Resonnering. Uformell løsningsmetode*

Transkripsjon 22: Marius oppgave 4 f) – uformell løsningstilnærming

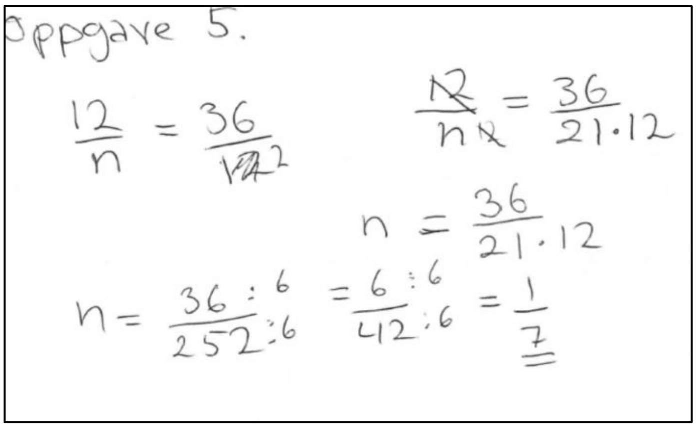
4.7 Analyse av oppgave 5 – Formell vs. uformell løsningstilnærming



Figur 21: Oppgave 5 - Løsningstilnærminger

Den siste oppgaven i settet viste seg å være den vanskeligste av dem, noe som ikke var uventet (se 3.5.5). To av informantene kom frem til riktig verdi av n.

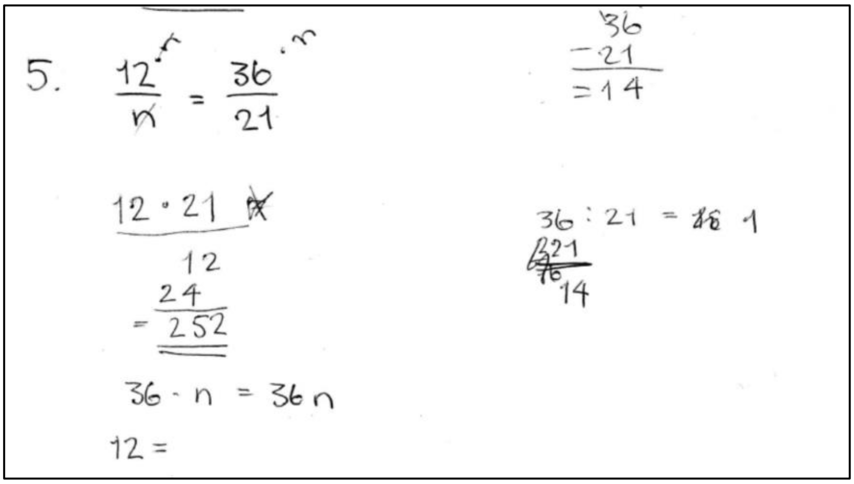
De to jentene, Trine og Ragnhild, valgte begge å løse denne oppgaven ved en formell tilnærming. Trine valgte en algebraisk løsningsmetode. Først multipliserte hun med 12 på begge sider av likhetstegnet, slik at hun fikk 1/n = 36/ 21*12.



Løsningseksempel 12: Trine oppgave 5

Deretter gjorde hun 1/n «om til heltall», en strategi hun benyttet ved flere anledninger (se også oppgave 4 b) og 4 f)). Hun stod dermed igjen med n, og regnet videre med det. Svaret n=1/7 er «riktig» i forhold til den nye likningen hun laget. Trines behandling av den ukjente under brøkstreken vitner om lav begrepsforståelse.

Ragnhild valgte også en algebraisk løsningsmetode. Hun foreslo umiddelbart å benytte seg av det hun kalte «kryss – regning». Hun forklarte at hun ville gange 12 med 21 og 36 med n. Ved å følge ut denne metoden, ville hun fått rett svar. Da hun hadde skrevet ned dette, ombestemte hun seg, og prøvde heller å «gange bort» brøken, ved å multiplisere med n på begge sider. Hun hang seg opp i prosessen, og endte opp med å gi opp oppgaven.



Løsningseksempel 13: Ragnhild oppgave 5

Hun forklarte det med: *«for det er sånn.. ser jeg sånne tall, så tenker jeg automatisk at jeg klarer ikke regne sånt i hodet».* Hun virket også nokså sliten på slutten, så det kan ha vært en bidragende faktor. Ragnhilds regelstyrte løsningsprosess fører til at hun har en tendens til strategirigiditet. Dette kan også være en bidragende faktor til at hun gir opp.

I motsetning til jentene, valgte Per og Marius begge å resonnere seg frem til en mulig n. De valgte med andre ord begge en uformell løsningstilnærming. Per begynte med å forkorte den ene brøken, og så utfra den hvilken verdi n måtte ha. Han brukte dermed sin kunnskap om likeverdighet for å komme frem til en løsning.

Marius resonnerte seg frem:

Hvem	**Handling/utsagn**	**Tolkning/kategori**
Marius:	eh... *sukker*. Her er jeg.. ingen anelse forsåvidt... ehh..jeg lurer på om jeg nesten bare skal se på det som n, at jeg setter det på en måte som en x. Det er ukjent.ehh. og det første jeg tenker er 12 ganger 3 er jo 36. og da vil man også kunne delt 21 på 3 og få svaret der. ehh..hvis det er det hele da.. ehh. 7 pluss 7.. ja svaret mitt er 7.	*resonnering*
Intervjuer:	mhm. Ja	*støtte*
Marius:	ja.*skriver* fordi da blir det som en høyere brøk. Hvis du ganger ehh hvis du ganger den her med 3 nå på teller og nevner, så får du det samme. Så det er jo samme betydning på brøkene.	*likeverdighet*

Transkripsjon 23: Marius oppgave 5 – Resonnering

Han nevnte også, slik som Per, likeverdighetsprinsippet. Marius har en godt utviklet resonneringsevne. Dette er en styrke i flere typer problemløsning. Likevel er hans mangel på formelle kunnskaper bekymringsverdig. Når formell kunnskap er viktig i utviklingen av algebraisk kompetanse (se 2.4.4), er dette problematisk for Marius.

4.8 Oppsummering begrepsforståelse og flyt i algebra for Trine, Per, Ragnhild og Marius

Trine arbeidet nokså regelstyrt med algebraoppgavene, slik som hun gjorde i oppgave 1. Hun viste at hun hadde innlært og automatisert en del prosedyrer, men hun manglet forståelse for hvorfor disse kunne benyttes. Trine gav inntrykk av å ha manglende begrepsforståelse av elementer som variable, likhetstegn og brøk. Den tydeligste indikasjonen på manglende begrepsforståelse ligger i hennes misoppfatning om at det er greit å «gjøre om brøk til et heltall», ved å bare skrive den om. Trines grad av flyt i arbeidet preges sterkt av hennes manglende begrepsforståelse av grunnleggende elementer i oppgavene.

Per benyttet flere ganger en mer uformell løsningstilnærming. Han forklarte dette med at han foretrakk å resonnere seg frem til et mulig svar. Han viste god forståelse av negative tall og brøk. I tillegg var han den eneste av informantene som reflekterte noe mer rundt likhetstegnets funksjon. Dette indikerte at han hadde tilegnet seg en dypere begrepsforståelse av likhetstegnet. Per hadde god prosedyreflyt i arbeid med flere av ligningene. Han ble hindret av mangelen på automatisert tabellkunnskap i arbeidet med noen av ligningene. Dette kan knyttes opp mot utsagnet til Kilpatrick et al. (2001) om at når det blir brukt unødig mye tid på utregninger som burde vært automatisert, kan man miste oversikten, og dermed miste viktig informasjon som er gitt i oppgaven (se 2.2.3).

Ragnhild benyttet en mer formell løsningstilnærming i tekstoppgaven og den siste oppgaven. Som flere av de andre informantene virket det ikke som hun hadde tilegnet seg noen dypere begrepsforståelse av likhetstegnet. Dette bidro blant annet til at ligningsløsningsprosedyren «flytt og bytt» ble benyttet ukritisk. I arbeid med brøkoppgaven var hun opptatt av å kvitte seg med brøken raskest mulig. Dette kunne tyde på at Ragnhild ikke følte seg trygg på dette matematiske begrepet.

Marius viste lav formell kompetanse i arbeid med algebraoppgavene. Han hadde også lav begrepsforståelse av flere matematiske begreper, slik som brøk, variabler og negative tall. Hans grad av flyt ble påvirket av manglende begrepsforståelse. I tillegg hadde Marius tydelig automatisert en del prosedyrer, som han tok i bruk ukritisk. I arbeid med algebra er automatiserte ferdigheter avgjørende (se 2.3). Likevel, er de ikke nok i seg selv. Marius kan ikke dra like godt nytte av sin automatisering, der han ikke har knyttet noen dypere forståelse til hvorfor prosedyren kan benyttes.

5 Oppsummering, diskusjon

I siste kapittel legges det vekt på å samle opp tråder fra de tidligere kapitlene. Det vil presenteres hovedtrekk ved funnene i datamaterialet. Deretter vil dette knyttes opp mot forskningsspørsmålet. Til sist i masteroppgaven er det en avsluttende kommentar, der det trekkes frem noen tanker rundt hvilke implikasjoner som kan følge av funnene i studien.

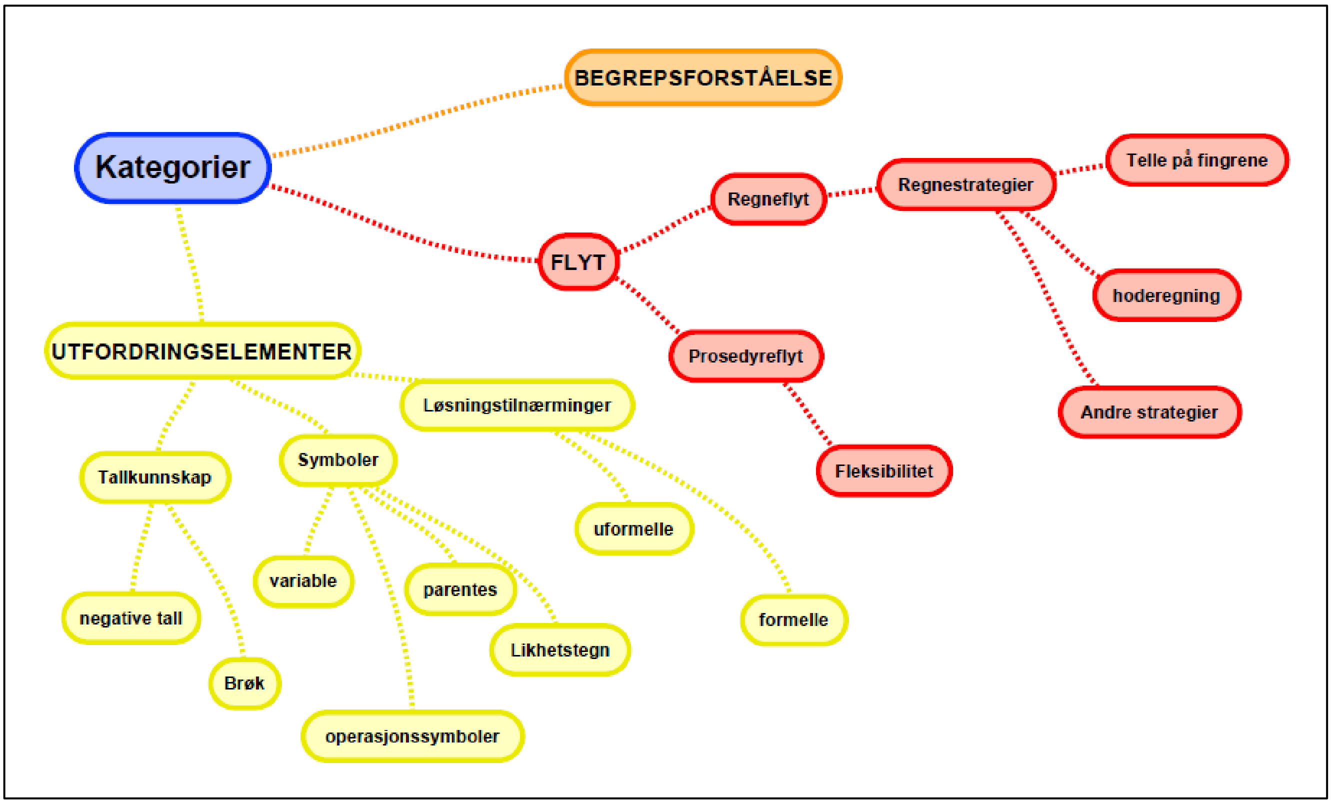
Forskningsspørsmålet har vært som følger: *«Hvilken grad av flyt (prosedyreflyt og regneflyt) finner vi hos 1P-elever med middels måloppnåelse, i møte med algebraoppgaver?».* Fokuset lå på å undersøke flyt, bestående av effektivitet, nøyaktighet og fleksibilitet, i arbeid med algebra. Dette ble gjort ved kvalitative, oppgavebaserte intervjuer, der informantene ble gitt et sett med oppgaver som inneholdt ulike utfordringselementer.

Informantene i studien hadde varierende grad av flyt i arbeidet med oppgavene. I noen tilfeller var graden av flyt i løsningsprosessen høy. I andre veldig lav. Det helhetlige inntrykket av de fire informantene var at de hadde lav til middels grad av flyt i arbeid med algebraoppgavene, totalt sett.

For samtlige av informantene gjaldt det at prosedyreflyten i arbeid med oppgavene stanset litt eller helt opp i møtet med utfordringselementer som informantene hadde lav begrepsforståelse av. Det er dermed mulig å konkludere at for informantene i denne studien påvirker begrepsforståelse av elementer som blant annet brøk, likhetstegn og negative tall graden av flyt i arbeidet med algebra.

5.1 Oppsummering av funn

Oppsummeringen av de viktigste funnene og tendensene i datamaterialet presenteres med utgangspunkt i den kategoriinndelingen som ble redegjort for i avsnitt 3.7. Figuren legges frem her, på nytt, for å illustrere:



Figur 7 (på nytt): Kategoriinndeling til analysen (samme som i 3.7)

5.1.1 Oppsummering av utfordringselementer

Blant de ulike utfordringselementene som ble vektlagt i oppgavesettet var informantenes tallkunnskap og symbolkunnskap. Innunder tallkunnskap var det kategorier som negative tall og brøk. Blant symbolene som ble brukt i oppgavene var det likhetstegn, variabler, operasjonssymboler og parenteser. Nedenfor oppsummeres de viktigste funnene fra de ulike kategoriene.

Tallkunnskap

Flere av informantene ytret at de syntes det var vanskelig å forholde seg til negative tall. Dette var ikke uventet. Det er godt dokumentert at mange elever synes negative tall er vanskelig å håndtere (se avsnitt «Positive og negative heltall» i 2.4.1). I følge Kilhamn (2011), kan feil eleven gjør i arbeid med ligninger ofte knyttes til manglende begrepsforståelse av negative tall. Dette var også tilfelle i denne studien. Marius stanset helt opp i sin løsning av oppgave 4 e) fordi han var usikker på om det var mulig at den ukjente kunne være en negativ størrelse. Ragnhild ytret noe om at «det er på andre siden av 0», da hun ble spurt om hvorfor hun syntes negative tall var vanskelig. Begge disse eksemplene kan knyttes opp mot det Gullick et al. (2012) skriver om at det ikke er lett for elevene å se for seg negative tall som en størrelse (se 2.4.1).

Brøk viste seg å innebære utfordringer også for informantene i denne masterstudien. Både Trine og Ragnhild hadde lav begrepsforståelse av brøk. Dette kom frem i arbeidet med flere av oppgavene. Begge forsøkte å fjerne brøken, slik at de ikke trengte forholde seg til dette elementet videre i oppgaveløsningen. Ragnhild gjorde dette ved å benytte prosedyrer for regning med brøk. Hennes prosedyrer var riktige, og indikerte at hun hadde tilegnet seg en del regler. Noen av disse reglene ble tatt i bruk ukritisk. Dette ble tolket som manglende begrepsforståelse. Trines løsningsmetode bar preg av en misoppfatning knyttet til brøkbegrepet. Hun benyttet konsekvent en prosedyre hun kalte å «gjøre om brøk til heltall», der hun blant annet skrev om ½ til 2. En slik misoppfatning kan få store konsekvenser for hennes arbeid med matematikk videre.

Den eneste av informantene som tilslutt utførte prosedyrene for ligningsløsning med brøk, var Per. Dette forteller noe om at de andre tre ikke føler seg trygge på dette matematiske begrepet. Når elevers brøkkompetanse har ringvirkninger for videre kompetanse i matematikken (se 2.4.1 «brøk»), er dette bekymringsverdig.

Symboler

Under intervjuene ble informantenes begrepsforståelse av likhetstegnet undersøkt. I arbeid med ligningene i oppgave 4 benyttet alle fire informantene seg stort sett av en prosedyre de omtalte som "flytte-bytte-regelen". Denne bestod i at leddene uten x ble flyttet over til den andre siden av likhetstegnet, samtidig som de byttet fortegn. Forståelsen av likhetstegnets funksjon kom blant annet til uttrykk ved forklaringen de gav for hvorfor det var mulig å gjøre det slik. Av alle fire informantene var det kun én av dem som viste noen refleksjon over hvorfor denne prosedyren kunne benyttes. De andre tre svarte kort at "jeg har bare lært det". Å kun tilegne seg prosedyrer for ligningsløsing, uten å forstå hvorfor det kan gjøres slik, er lite hensiktsmessig (se 2.4.2).

Alle informantene gav inntrykk av å forstå relasjonen mellom de aritmetiske operasjonene. Dette er en viktig del av den matematiske kompetansen (se 2.4.2 «operasjonssymboler»). Marius knyttet divisjon tett opp mot multiplikasjon i flere av oppgavene, noe som tydet på at han hadde forstått den inverse relasjonen mellom disse operasjonene (se blant annet 4.6.6). Dette virket som en strategi har ofte benyttet, som bidro til å gi han økt grad av regneflyt i løsningsprosessen.

De fleste informantene gav inntrykk av å ha en forståelse av den ukjente som et tall, en størrelse. I arbeidet med oppgave 3 klarte alle å finne det riktige uttrykket, noe som vitner om god prosedyrekunnskap i forhold til variabler. Forklaringene på hvorfor de valgte å gjøre som de gjorde gav innblikk i noe av begrepsforståelsen av variabler. Både Trines og Marius sitt svar kunne indikere at de hadde en manglende begrepsforståelse.

En av informantene hadde vanskeligheter med ligningen der den ukjente var på begge sider av likhetstegnet. Dette kan både tolkes som manglende begrepsforståelse av den ukjente, men også av likhetstegnet.

Parenteser var også et utfordringselement som var i fokus i informantenes arbeid med oppgavene. Marius viste lav begrepsforståelse av parenteser i flere av oppgavene, særlig i oppgave 1 a). Som redegjort for i 2.4.2 er det nødvendig med en god begrepsforståelse av parenteser for å oppnå god algebraisk kompetanse. At Marius gjør slike feil som i 1 a) er dermed bekymringsverdig. Manglende begrepsforståelse knyttet til grunnleggende elementer som parenteser vil kunne få konsekvenser for hans matematiske kompetanse videre.

Løsningstilnærminger

Per og Marius benyttet begge uformelle løsningsmetoder på flere av oppgavene. På den andre oppgaven, tekstoppgaven, valgte de en aritmetisk løsningstilnærming. Per forklarte at han hadde lært å sette det opp som en ligning med en ukjent, men at han foretrakk å heller resonnere seg frem til svaret. Marius svarte kort “nei” på spørsmål om han hadde lært å løse tilsvarende oppgaver ved å sette opp en ligning.

Begge jentene benyttet en formell, algebraisk løsningsmetode. De valgte begge å la den ukjente stå for Siris mengde bagasje. Deretter satte de opp en ligning med informasjonen som var gitt i teksten. Begge jentene valgte en løsningstilnærming som stemte godt overens med den matematiske situasjonen som var skildret i teksten. Dette er et vesentlig moment i arbeid med tekstoppgaver (se 2.4.3).

På den siste oppgaven benyttet informantene også ulike løsningstilnærminger. Begge jentene valgte igjen her en mer formell tilnærming, der de fulgte ligningsløsningsprosedyrer. De fikk begge feil svar, men dette hadde flere årsaker, som ble drøftet i 4.6.6. Begge guttene valgte å resonnere seg frem til en mulig n. De fikk begge samme verdi av n, men valgte to ulike løsningstilnærminger. Felles for deres løsningstilnærminger var at de bar preg av å være uformelle. Å kunne resonnere seg frem til en verdi av den ukjente uten å følge prosedyrer for ligningsløsning kan indikere en god tallforståelse. Valget av en uformell løsningstilnærming kan bidra til mer fleksibilitet i oppgaveløsningen. Allikevel: siden kunnskap om formelle løsningsmetoder er nødvendig for videre arbeid i algebra, er det ikke hensiktsmessig at de stadig velger en uformell tilnærming. Når det konkluderes i TIMSS-rapporten fra 2011 at norske elever skårer lavt i algebra hovedsakelig på grunn av manglende formell kunnskap, er det bekymringsverdig at disse informantene ikke har bedre formell kompetanse. Dette vil kunne påvirke den algebraiske kompetansen i stor grad.

5.1.2 Oppsummering av funn som illustrerer graden av flyt og begrepsforståelse hos informantene

Trine gav inntrykk av å ha nokså god kontroll på de ulike prosedyrene. Til tider viste hun høy grad av prosedyreflyt i arbeid med oppgavene. Hun hadde god regneflyt, som særlig kom til uttrykk ved at hun mestret en effektiv hoderegning. Intervjuer fikk etterhvert inntrykk av at Trine jobbet nokså regelstyrt, og at hun hadde automatisert flere regler og prosedyrer. I møtet med blant annet brøk i oppgavene, ble et tydelig at Trine manglet en grunnleggende begrepsforståelse av brøk (som diskutert ovenfor). Denne manglende begrepsforståelsen førte til misoppfatninger, om igjen førte til at hun utførte mange innlærte prosedyrer helt ukritisk. Dette gav inntrykk av god flyt i arbeidet, men svarene hennes ble feil. Når flyt defineres som bestående av effektivitet, nøyaktighet og fleksibilitet (se 1.2), er det dermed ikke mulig å si at Trine har høy grad av flyt i arbeidet sitt. Når hun både benytter prosedyrer som vitner om store misoppfatninger, og er en ufleksibel ligningsløser, mangler to av komponentene. Hun er ikke nøyaktig, eller fleksibel. Det kan dermed ikke sies at Trine helhetlig har høy grad av flyt i arbeidet med oppgavesettet.

Per hadde lav grad av regneflyt. Dette kom blant annet til uttrykk i hans manglende automatisering av tabellkunnskap. Per måtte stadig ty til regnestrategier som fingertelling for relativt enkle utregninger. Fingertellingen hans gjorde både at han brukte mer tid på oppgaveløsingene, men også at han til tider mistet oversikten. Den lave grad av regneflyt bidro til at han brukte unødig mye tid og energi på oppgaven. I tillegg fikk han flere utfordringer enn han kanskje ville hatt med en høyere grad av flyt. Hans begrepsforståelse av likhetstegnet bidro til å gjøre han mer fleksibel i ligningsløsningen, selv om han stort sett kun benyttet «flytte-bytte»-prosedyren.

Marius hadde høy grad av regneflyt. Han hadde automatisert de fleste av de grunnleggende regneferdighetene. Divisjon av større tall hadde han litt vanskeligheter med. Hans flyt ble tydeliggjort i hans effektive og nøyaktige hoderegning. Marius hadde varierende grad av prosedyreflyt i arbeid med oppgavene. Den enkleste ligningen, for eksempel, løste Marius effektivt og nøyaktig. Når han kom til blant annet ligningene med den ukjente på begge sider av likhetstegnet, eller med innslag av brøk, parenteser og negative tall, hindret hans manglende begrepsforståelse prosedyreflyten. Hans manglende begrepsforståelse av likhetstegnet gjorde han til en ufleksibel ligningsløser. I tillegg var noen av de automatiserte ferdighetene og prosedyrene knyttet til spesifikke oppgavetyper. Det helhetlige inntrykket av Marius sitt arbeid er at han har lav grad av flyt. Mye av dette skyldtes at hans manglende begrepsforståelse bidro til lavere grad av prosedyreflyt.

Ragnhild arbeidet nøyaktig, effektivt og fleksibelt med flere av oppgavene. Det gjorde at hun hadde høy grad av flyt i noen av oppgavene. Hun hadde god regneflyt, og godt utviklet hoderegning. Likevel var det ikke høy grad av flyt i arbeidet med alle oppgavene. Ragnhild ble hindret i møtet med brøk og negative tall. Med andre ord påvirket manglende begrepsforståelse av disse elementene også hennes grad av flyt.

5.2 Avsluttende kommentar

Med bakgrunn i blant annet Kilpatrick et al. (2001) og Tolar et al. (2009), er det klart at graden av flyt er en viktig komponent i algebraisk kompetanse. Informantene i denne studien hadde til tider lav grad av flyt i arbeidet med algebraoppgavene. Den lave graden av flyt skyldtes i mange av tilfellene en manglende begrepsforståelse av matematiske begreper. Dette forteller om et viktig aspekt ved informantenes algebraiske kompetanse. De fire hadde flere «hull» i sin aritmetiske kompetanse, som klart påvirket graden av flyt i arbeidet. Eksistensen av slike «hull» eller mangler kan ha flere negative implikasjoner. Først og fremst bidrar det til utfordringer og vanskeligheter i arbeidet med matematikk, som kunne vært unngått med et bedre aritmetisk fundament. Dette er et godt argument for å legge større vekt på elevers grunnleggende tall- og symbolkunnskap.

Andre implikasjoner kan ligge utenfor selve skolematematikken. Som nevnt innledningsvis, kan manglende algebraisk kompetanse by på utfordringer også utenfor matematikkfaget. De abstrakte resonneringsevnene elevene utvikler i overgangen fra aritmetikk til algebra er, som

Ketterlin-Geller og Chard (2011) skriver, nødvendige for videre arbeid med andre vitenskapelige emner. For individene i denne studien kan den manglende begrepsforståelsen bidra til at de ikke utvikler ønsket algebraisk kompetanse. Dermed kan de gå glipp av ulike studie- og karrieremuligheter der en slik kompetanse er ansett som nødvendig. I tillegg bidrar algebraisk kunnskap til å gi elevene verktøy som kan brukes for å se sammenhenger og årsaker i verden rundt seg (se 1.1). En manglende algebraisk kompetanse kan dermed føre med seg flere negative implikasjoner for individet det gjelder.

Når samtlige av informantene har lav grad av flyt i arbeid med oppgaver som inneholder grunnleggende elementer, er dette bekymringsverdig. Som diskutert i 1.2, kan mangel på flyt i grunnleggende evner og kunnskap i matematikken være begrensende. Det vi kan trekke ut fra denne studien er følgende: Dersom graden av flyt har innvirkning på informantens algebraiske kompetanse, og informantens grunnleggende tall- og symbolkunnskap påvirker graden av flyt, er dette noe som bør undersøkes nærmere. Knyttet opp mot TIMSS-rapporten fra 2011, er det klart at norske elevers algebraiske kompetanse er et viktig område å forske videre på. Det er både et matematikkdidaktisk, men også et samfunnsmessig argument for at begrepsforståelse av grunnleggende aritmetiske begreper, og automatisering av disse kunnskapstypene, bør vektlegges i større grad. Kanskje kan denne masteroppgaven fungere som et bidrag inn i et større undersøkelsesområde?

Litteraturliste

Alseth, B., Throndsen, I., & Turmo, A. (2008). *Rapport fra kartleggingsprøver i tallforståelse og regneferdighet for 2. årstrinn og Vg1* (Vol. 2/2009). Oslo: Universitetet i Oslo, Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling.

Byrnes, J. P., & Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental Psychology, 27*(5), 777-786. doi: 10.1037/0012-1649.27.5.777

Calhoon, M. B., Emerson, R. W., Flores, M., & Houchins, D. E. (2007). Computational Fluency Performance Profile og High School Students With Mathematics Disabilities. *Remedial and Special Education, 28*(292).

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a Theoretical Model to Study Students' Understandings of Fractions. *Educational studies in mathematics, 64*(3), 293-316.

Codding, R. S., Shiyko, M., Russo, M., Birch, S., Fanning, E., & Jaspen, D. (2007). Comparing mathematics interventions: Does initial level of fluency predict intervention effectiveness? *Journal of School Psychology, 45*(6), 603-617. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.jsp.2007.06.005

Dalen, M. (2004). *Intervju som forskningsmetode : en kvalitativ tilnærming*. Oslo: Universitetsforl.

Den Nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora. (2006). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi*. [Oslo]: Forskningsetiske komiteer.

Elstad, E., Turmo, A., & Andreassen, R. (2006). *Læringsstrategier: søkelys på lærernes praksis*. Oslo: Universitetsforl.

Engelbrecht, J., Harding, A., & Potgieter, M. (2005). Undergraduate students' performance and confidence in procedural and conceptual mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36*(7), 701-712. doi: 10.1080/00207390500271107

Foster, D. (2007). Making Meaning in Algebra Examining Students' Understandings and Misconceptions. I *Assesing Mathematical Proficiency* (MSRI Publications.

Goldin, G. A. (1997). Chapter 4: Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 9*, 40-177. doi: 10.2307/749946

Goldin, G. A. (2000). A Scientific Perspective on Structured, Task-Based Interviews in Mathematics Education Research. I A. E. Kelly & R. A. Lesh (Red.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Grønmo, L. S. (2013). Algebra og all er motoren i matematikken - derfor går matematikkfaget i Norden for halv fart. *Bedre skole, 1*, 17 - 22.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H., & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram: norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo: Akademika.

Gullick, M. M., Wolford, G., & Temple, E. (2012). Understanding less than nothing: Neural distance effects for negative numbers. *NeuroImage, 62*(1), 542-554. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.neuroimage.2012.04.058

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 59-78. doi: 10.1007/BF01284528

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematiscs: An Introductory Analysis. I J. Hiebert (Red.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics* (s. 1 -27). Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Holm, M. (2002). *Opplæring i matematikk: for elever med matematikkvansker og andre elever*. Oslo: Cappelen.

Houssart, & Evans. (2011). Conducting task-based interviews with pairs of children: consensus, conflict, knowledge construction and turn taking. *International journal of research & method in education, 34*(1), 63.

Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *The Journal of Mathematical Behavior, 16*(2), 145-165. doi: http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90023-7

Johannessen, A., Tufte, P. A., & Kristoffersen, L. (2010). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode*. Oslo: Abstrakt.

Jolivette, K., Lingo, A. S., Houchins, D. E., Barton-Arwood, S. M., & Shippen, M. E. (2006). Building math fluency for students with developmental disabilities and attentional difficulties using Great leaps math. *Education and Training in Developmental Disabilities, 41*(4), 392-400.

Jordan, N. C., Hansen, N., Fuchs, L. S., Siegler, R. S., Gersten, R., & Micklos, D. (2013). Developmental predictors of fraction concepts and procedures. *Journal of Experimental Child Psychology, 116*(1), 45-58. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.jecp.2013.02.001

Ketterlin-Geller, L. R., & Chard, D. J. (2011). Algebra Readiness for Students with Learning Difficulties in Grades 4-8: Support through the Study of Number. *Australian journal of learning difficulties, 16*(1), 65-78.

Kieran, C. (1989). The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective. I S. Wagner & C. Kieran (Red.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (s. 33 - 53). Reston, Va.: Erlbaum : National Council of Teachers of Mathematics.

Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers* (Vol. 304). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up : helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Koichu, B., & Harel, G. (2007). Triadic interaction in clinical task-based interviews with mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics, 65*(3), 349-365. doi: 10.1007/s10649-006-9054-0

Kunnskapsdepartementet. (2010). Læreplan for matematikk fellesfag.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (T. M. Anderssen & J. Rygge, Trans.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Leiulfsrud, H., & Hvinden, B. (1996). Analyse av kvalitative data: fiksérbilde eller puslespill? I *Kvalitative metoder i samfunnsforskning* (s. S. 220-239). Oslo: Universitetsforl.

Maxwell, J. A. (2013). *Qualitative research design: an interactive approach*. Los Angeles: Sage.

Naalsund, M. (2012). *Why is algebra so difficult? : a study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency* (Vol. no. 154). Oslo: Unipub forl.

Nilssen, V. L. (2012). *Analyse i kvalitative studier: den skrivende forskeren*. Oslo: Universitetsforl.

Nortvedt, G. A. (2011). *Norwegian grade 8 students' competence in understanding and solving multistep arithmetic word problems* (Vol. no. 140). Oslo: Unipub forl.

Ostad, S. A. (1999). *Elever med matematikkvansker: studier av kunnskapsutviklingen i strategisk perspektiv*. [Oslo]: Unipub.

Reed, S. K. (1999). *Word problems: research and curriculum reform*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum.
Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*(2), 346-362. doi: 10.1037/0022-0663.93.2.346
Robinson, K. M., & Dubé, A. K. (2009). Children's understanding of the inverse relation between multiplication and division. *Cognitive Development, 24*(3), 310-321. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.cogdev.2008.11.001
Robinson, K. M., & LeFevre, J. A. (2012). The inverse relation between multiplication and division: Concepts, procedures, and a cognitive framework. *Educational Studies in Mathematics, 79*(3), 409-428. doi: 10.1007/s10649-011-9330-5
Russell, S. J. (2000). Developing Computational Fluency with Whole Numbers. *Teaching Children Mathematics, 7*(3), 154-158. doi: 10.2307/41197542
Schneider, M., Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2011). Relations among conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. *Developmental Psychology, 47*(6), 1525-1538. doi: 10.1037/a0024997
Schneider, M., & Stern, E. (2010). The developmental relations between conceptual and procedural knowledge: A multimethod approach. *Developmental Psychology, 46*(1), 178-192. doi: 10.1037/a0016701
Seethaler, P. M., Fuchs, L. S., Star, J. R., & Bryant, J. (2011). The cognitive predictors of computational skill with whole versus rational numbers: An exploratory study. *Learning and Individual Differences, 21*(5), 536-542. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.lindif.2011.05.002
Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62*(4), 273-296. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001
Sjøvoll, J. (2006). *Tilpasset opplæring i matematikk: om retten til å lykkes i læringsarbeidet*. Oslo: Gyldendal akademisk.
Star, J. R., & Seifert, C. (2006). The development of flexibility in equation solving. *Contemporary Educational Psychology, 31*(3), 280-300. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.cedpsych.2005.08.001
Stephens, A. (2006). Equivalence and relational thinking: preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(3), 249-278. doi: 10.1007/s10857-006-9000-1
Tolar, T. D., Lederberg, A. R., & Fletcher, J. M. (2009). A Structural Model of Algebra Achievement: Computational Fluency and Spatial Visualisation as Mediators of the Effect of Working Memory on Algebra Achievement. *Educational psychology, 29*(2), 239-266.
Utdanningsdirektoratet. (2010). Læreplan i matematikk fellesfag. Oslo: Utdanningsdirektoratet.
Varol, F., & Farran, D. (2007). Elementary School Students' Mental Computation Proficiencies. *Early Childhood Education Journal, 35*(1), 89-94. doi: 10.1007/s10643-007-0173-8
Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. *Learning and Instruction, 14*(5), 469-484. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.012
Wagner, S., & Kieran, C. (1989). *Research issues in the learning and teaching of algebra*. Reston, Va.: Erlbaum : National Council of Teachers of Mathematics.

Welder, R. (2012). Improving Algebra Preparation: Implications from Research on Student Misconceptions and Difficulties. *School science and mathematics, 112*(4), 255-264.

Özsoy, G. (2011). An investigation of the relationship between metacognition and mathematics achievement. *Asia Pacific Education Review*, *12*(2), 227-235.

Vedlegg

Vedlegg 1: Brev fra NSD

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS
NORWEGIAN SOCIAL SCIENCE DATA SERVICES

Harald Hårfagres gate 29
N-5007 Bergen
Norway
Tel. +47-55 58 21 17
Fax +47-55 58 96 50
nsd@nsd.uib.no
www.nsd.uib.no
Org.nr. 985 321 884

Guri A. Nortvedt
Institutt for lærerutdanning og skoleforskning
Universitetet i Oslo
Postboks 1099 Blindern
0317 OSLO

Vår dato: 20.03.2013 Vår ref:33814 / 3 / KH Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 12.03.2013. Meldingen gjelder prosjektet:

33814	*1P-elevers arbeid med algebra*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Oslo, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Guri A. Nortvedt*
Student	*Ingvild Barland Spilling*

Etter gjennomgang av opplysninger gitt i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon, finner vi at prosjektet ikke medfører meldeplikt eller konsesjonsplikt etter personopplysningslovens §§ 31 og 33.

Dersom prosjektopplegget endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for vår vurdering, skal prosjektet meldes på nytt. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html.

Vedlagt følger vår begrunnelse for hvorfor prosjektet ikke er meldepliktig.

Vennlig hilsen

Vigdis Kvalheim

Vigdis Namtvedt Kvalheim

Kjersti Håvardstun

Kjersti Håvardstun

Kontaktperson: Kjersti Håvardstun tlf: 55 58 29 53
Vedlegg: Prosjektvurdering
Kopi: Ingvild Barland Spilling, Rolf E. Stenersens alle 12, h0101, 0858 OSLO

Avdelingskontorer / *District Offices*:
OSLO: NSD. Universitetet i Oslo, Postboks 1055 Blindern, 0316 Oslo. Tel: +47-22 85 52 11. nsd@uio.no
TRONDHEIM: NSD. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim. Tel: +47-73 59 19 07. kyrre.svarva@svt.ntnu.no

Vedlegg 2: Orienterings- og samtykkebrev

Forespørsel om å delta i intervju i forbindelse med min masteroppgave.

Mitt navn er Ingvild Barland Spilling. Jeg er for tiden masterstudent ved Institutt for lærerutdanning og skoleforskning ved Utdanningsvitenskapelig fakultet, Universitetet i Oslo. Dette året holder jeg på med den avsluttende masteroppgaven. I forbindelse med den, ønsker jeg å gjennomføre oppgavebaserte intervjuer med fem elever som tar 1P.

Temaet for masteroppgaven er elevers forståelse av algebra. De siste årene har det vært mye fokus på at norske elever skårer lavt i algebra, og dette er en av årsakene til at jeg har valgt dette temaet. Jeg ønsker å se nærmere på hva som gjør algebra vanskelig. For å se nærmere på dette vil jeg gjennomføre et oppgave-basert intervju med 5 elever som går i 1P. Intervjuet vil bestå av 5 algebraoppgaver som du blir bedt om å løse. I tillegg vil jeg stille spørsmål om hvordan du har jobbet med oppgaven. Det vil ikke være hvorvidt svarene er riktige eller ikke som er i fokus. Jeg vil understreke at du ikke skal oppleve det som en eksamenssituasjon. Jeg er mer interessert i hvordan du jobber med oppgavene.

Når man arbeider med en oppgave i matematikk er det flere ting som er interessante. Noen ting husker du fra før, og bruker denne kunnskapen for å løse oppgaven. Ting du har lært tidligere lagres i hukommelsen, og etter hvert blir noe av det automatisert. Det vil si at det du har lært etter hvert blir så innarbeidet at det å bruke dem går helt automatisk. Ofte vil du ikke engang tenke noe særlig over det. For å ta et eksempel, kan jeg nevne gangetabellen. Når du har automatisert gangetabellen, kan du ta gangestykker raskt i hodet. Du vil ikke ha behov for å telle deg frem til svaret, eller bruke kalkulator. Når vi jobber med algebra kreves det at man har automatisert en del ting.

I masteroppgaven er jeg interessert i å se hva av det du gjør når du løser oppgavene som er automatisert, og hva som ikke er det. Jeg kommer derfor til å be deg fortelle meg hva du gjør underveis. Det vil ikke være noen feil svar.

Jeg vil benytte meg av lydopptak og ta notater mens intervjuet pågår. Det vil ta omtrent en time. Opptakene er det kun jeg som vil ha tilgang til – ingen andre. Alle opplysninger vil behandles konfidensielt, og siden alt skal anonymiseres vil ikke være mulig å gjenkjenne enkeltpersoner i den endelige oppgaven. Når oppgaven er ferdig skrevet, og sensuren er gitt, vil jeg slette alle opptakene. Dette vil skje innen desember 2013.

Jeg har meldt prosjektet inn til Norsk Samfunnsvitenskapelige Datatjeneste (NSD).

Det er frivillig å delta, og det er mulig å trekke seg når som helst, uten å måtte oppgi noen grunn for det. Dersom du kunne tenke deg å være med på dette, er det fint om du skriver under på vedlagt samtykkeerklæring.

Hvis det er noe du lurer på er det bare å ringe meg på 47239267 eller sende meg en mail på ingvibl@student.matnat.uio.no

Med vennlig hilsen,

Ingvild B. Spilling

Rolf E. Stenersens alle 12, H0101

0858 Oslo

Samtykkeerklæring:

Jeg har mottatt skriftlig informasjon og er villig til å delta i studien.

Signatur …………………………………. Telefonnummer ……………………………..

Vedlegg 3:

Intervensjon/spørsmålstyper som følger Goldins 4 stadier:

Disse er veiledende, og danner en mal for hvilke typer spørsmål jeg kan stille under intervjuet.

1) Fri problemløsning. I dette stadiet stilles det kun «nondirective» spørsmål som
   - «Kan du si noe mer om det?»,
   - «Hva mener du med det?»
   - «hva ser du her?»
   - «hva tenker du å gjøre her?»
2) Stadium to kjennetegnes ved minimalt heuristiske forslag. Eksempler er:
   - «Kan du vise meg hva du vil gjøre med dette?»
   - «Kan du si noe om hva du tenker om denne?»
   - «Hva er det første du vil gjøre her?»
   - «Hvilke av disse vil du ta først?»
   - «Hva er det du skal finne?»
3) Tredje stadie innebærer veiledende bruk av heuristiske forslag.
   - «Kan du se en sammenheng mellom disse?»
   - «Kan du si noe om rekkefølgen?»
   - «kan du si noe om hva det betyr at de er likeverdige?»
   - «Hva tenker du x-en kan være her?»
   - «Hva var det du gjorde her? (litt tidligere) Kan du si noe om hvorfor du gjorde det?»
   - «hva vet du om brøk i ligninger?»
   - «hva ville du gjort om den ukjente var over brøkstreken?»
4) Siste stadiet kjennetegnes ved undersøkende, metakognitive spørsmål:
   - «Kan du si noe om hva du tenkte når du begynte å løse oppgaven?»
   - «Kan du si noe om hvorfor du valgte å flytte den over?»
   - «Hva skjer om du prøver dette?»

Under selve intervjuet er det mulig å stille spørsmålet «hvorfor?» for å få informanten til å utdype hva han gjør. Det er viktig å ikke overbruke dette, da det er vist å kunne forstyrre løsningsprosessen til informanten dersom det ikke brukes gjennomtenkt.

Vedlegg 4:

Mailkorrespondanse

From: Margrethe Naalsund
Sent: Friday, February 08, 2013 1:56 PM
To: 'ingvildspilling'
Subject: RE: Masteroppgave - forespørsel

Hei,

Dette høres spennende ut☺ Det er bare å bruke de oppgavene som evt kan være interessante for deg. Jeg trenger ikke å lese din prosjektbeskrivelse, men du må gjerne ta kontakt om du ønsker å diskutere noe, jeg er innom Blindern av og til. Lykke til,

Mvh

Margrethe

From: ingvildspilling [mailto:ingvildspilling@gmail.com]
Sent: Tuesday, February 05, 2013 2:04 PM
To: Margrethe Naalsund
Subject: Masteroppgave - forespørsel

Hei:)

Jeg er masterstudent ved Utdanningsvitenskapelig fakultet, ved Universitetet i Oslo. I masteroppgaven min ønsker jeg å se på hvordan 1P-elever arbeider med algebra. I den anledning har jeg blant annet lest din avhandling; " Why is algebra so difficult?". Hadde det vært mulig om jeg kunne bruke ett par av algebraoppgavene fra undersøkelsen din i min master? Jeg skal skrive en kvalitativ oppgave i matematikkdidaktikk, der jeg blant annet benytter et oppgave- basert intervju. Jeg er interessert i å se nærmere på nivået av automatiserte ferdigheter elevene har i løsningsprosessen. Det ville vært en fordel å ha et par oppgaver som allerede var testet ut.

Jeg kan sende deg et sisteutkast av prosjektbeskrivelsen min, dersom det er ønskelig.

Mvh, Ingvild Spilling